Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik 27. Januar 2014

Höhere Mathematik I.1

Übung 14: Folgen und Reihen

1. Ein auf 100°C erhitzter Körper habe nach n Minuten die Temperatur $T_n = 20 + 80 \cdot 2^{-\frac{n}{10}}\,[°\mathrm{C}]$.
   a) Zeigen Sie mithilfe der Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge, dass die Temperatur des Körpers gegen die (Umgebungs-)Temperatur von 20°C konvergiert.
   b) Ermitteln Sie, nach wieviel Minuten die Temperatur des Körpers unter 25°C, 20.5°C, 20.05°C bzw. 20.005°C gefallen ist!

2. Untersuchen Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) konvergieren, bestimmt oder unbestimmt divergieren, und geben Sie ggf. die Grenzwerte an:
   a) $a_n = (-0.99999)^n$, b) $a_n = (-1.00001)^n$, c) $a_n = 1.00001^n$,
   d) $a_n = \dfrac{0.01\,n^6 + 0.1\,n^5}{100\,n^5 + 500\,n^4 + 200}$, e) $a_n = \dfrac{2n^5 + 3n^4 + 4n^2 + 7}{(3n+1)^2(4n^3 - 3n^2 + n + 3)}$, f) $a_n = \dfrac{n^2 + 9n + 4}{\sqrt[4]{n^9} + 2n + 1}$!

3. Betrachtet wird die Folge $a_n = \dfrac{1{,}001^n}{n}$.
   a) Berechnen Sie die Folgenglieder a_n für $n = 10$, 100 und 1000 !
   b) Welchen Grenzwert hat die Folge?
   c) Berechnen Sie die Folgenglieder a_n für $n = 10.000$, 100.000 und 1.000.000 !
   d) Von welchem n an ist die Folge monoton wachsend?
   e) Beweisen Sie die Aussage von b)!

4. Berechnen Sie mit der Formel für die Partialsumme der geometrischen Reihe
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{8} \left(\frac{3}{2}\right)^n$!

5. Ermitteln Sie in folgenden Fällen, ob die Folgen (a_n) und die Reihen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergieren:
   a) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, b) $a_n = \dfrac{99^n}{100^n}$, c) $a_n = \dfrac{101^n}{100^n}$, d) $a_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$, e) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,
   f) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n} - \dfrac{n^2}{n+1}$!

   Bestimmen Sie im Konvergenzfall die Grenzwerte bzw. Summen!

6. Vor ihrer Abschaffung Ende 2012 wurden Finanzierungsschätze des Bundes mit einer Laufzeit von ein und zwei Jahren zu einem Zinssatz von 0,0001 % p.a. verkauft. Geben Sie ohne Benutzung von Hilfsmitteln an, auf welchen Betrag ein Euro anwachsen würde, wenn man ihn für eine Million Jahre zu einem derartigen Zinssatz ohne Rundungseffekte anlegen würde!