Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 27. Januar 2014

---

1. Berechnen Sie, indem Sie nach der zweiten Spalte entwickeln: $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \end{vmatrix} + d \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -a(-48-32-30+36+40+32) + b(-60-16-10+12+50+16) \\
&\quad - c(-80-24-20+16+75+32) + d(-40-12-12+8+45+16) \\
&= 2a - 8b + c + 5d
\end{aligned}$$

---

2. a) Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!

b) Lösen Sie mit Hilfe der inversen Matrix die Gleichungssyteme

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 8 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 12x_3 + 5x_4 &= 11 \end{aligned} \quad !$$

Lösung:

a)

$$\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 1 & 9 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
4 & 5 & 12 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -5 & 0 & -10 & -3 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -5 & -5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
0 & -3 & 0 & -11 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -5 & -\frac{11}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrr|rrrr}
1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 2 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{25} & \frac{3}{25} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{25} & \frac{19}{25} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{25} & -\frac{11}{25} & 0 & \frac{2}{5} \\
0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{25} & -\frac{3}{25} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{11}{25} & \frac{3}{25} & 0 & -\frac{1}{5}
\end{array}$$

Es ist also $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{25} \begin{pmatrix} -2 & 19 & 15 & -15 \\ -7 & -11 & 0 & 10 \\ -1 & -3 & -5 & 5 \\ 11 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

b) $\boldsymbol{A}\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\vec{b}$. Um die ermittelte inverse Matrix nutzen zu können, müssen beim zweiten Gleichungssystem die 2. und die 3. Zeile vertauscht werden. Durch den Zeilentausch ändert sich die Lösung des Gleichungssystems nicht.

Die Lösungen sind $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}0\\5\\0\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}7\\1\\9\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\\1\end{pmatrix}$.

---

3. In dem Gleichungssystem $x_1 = y_1,\ x_3 = y_2,\ x_2 = y_3,\ ax_3 + bx_4 = y_4$ seien y_i $(i=1,2,3,4)$ gegeben und x_i $(i=1,2,3,4)$ gesucht.

a) Notieren Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise, bestimmen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Inverse der Koeffizientenmatrix und notieren Sie mit Hilfe dieser Inversen die Lösung des Gleichungssystems!

b) Für welche Werte der Parameter a und b existiert die Inverse nicht? Geben Sie die ggf. dennoch existierende Lösung des Gleichungssystems an!

Lösung:

a)
$$\begin{array}{llll} x_1 & & & = y_1 \\ & & x_3 & = y_2 \\ & x_2 & & = y_3 \\ & & ax_3 + bx_4 & = y_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|cccc}
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&a&b&0&0&0&1\\ \hline
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&a&b&0&0&0&1\\ \hline
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&b&0&-a&0&1\\ \hline
1&0&0&0&1&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&1&0\\
0&0&1&0&0&1&0&0\\
0&0&0&1&0&-\frac{a}{b}&0&\frac{1}{b}
\end{array}$$
falls $b \neq 0$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-\frac{a}{b}&0&\frac{1}{b}\end{pmatrix},\ \text{falls } b \neq 0$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-\frac{a}{b}&0&\frac{1}{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_3\\y_2\\-\frac{a}{b}y_2 + \frac{1}{b}y_4\end{pmatrix}$$

Für $b \neq 0$ ergibt sich also die Lösung

$$x_1 = y_1,\ x_2 = y_3,\ x_3 = y_2,\ x_4 = \frac{-ay_2 + y_4}{b}.$$

b) Die Inverse existiert nicht, falls $b=0$ gilt. Ist dies der Fall, so lautet das Gleichungssystem

$$x_1 = y_1,\ x_3 = y_2,\ x_2 = y_3,\ ax_3 = y_4.$$

Einsetzen der 2. in die 4. Gleichung ergibt $ax_3 = ay_2 = y_4$ sein. Für $b=0$ ist das Gleichungssystem also nur dann lösbar, wenn $ay_2 = y_4$ gilt.

Ist dies der Fall, so kann x_4 beliebig gewählt werden, weil es überhaupt nicht im Gleichungssystem vorkommt. Die allgemeine Lösung lautet dann also $x_1 = y_1,\ x_2 = y_3,\ x_3 = y_2,\ x_4 = t$, t beliebig.

4. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt des Koordinatenursprungs an der Ebene $3x+2y-4z=58$!

Lösung:

Den Spiegelpunkt erhält man, wenn man vom Koordinatenursprung das Lot auf die gegebene Ebene fällt und daran noch einmal das Lot daran setzt. Da auf der Ebene der Vektor $\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ -4 \end{pmatrix}$ senkrecht steht, ist $\vec{x}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ -4 \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ -4 \end{pmatrix}$ die Geradengleichung des Lots. Der Lotfußpunkt ergibt sich durch Einsetzen in die Ebenengleichung: $3\cdot 3t+2\cdot 2t-4(-4t)=29t=58$, $t=2$.

Somit ist $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ -4 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor des Lotfußpunktes und $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12\\ 8\\ -16 \end{pmatrix}$ der des Spiegelpunktes. Der Koordinatenursprung wird also in den Punkt $(12,8,-16)$ gespiegelt.

---

5. Bestimmen den Mittelpunkt und Radius des Kreises, der bei Rotation des Punktes $(-1,-2,10)$ um die Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix} -1\\ -7\\ -6 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, sowie die Gleichung der Ebene, in der dieser Kreis liegt!

Lösung:

Den Drehmittelpunkt erhält man durch Fällen des Lot von dem gegebenen Punkt auf die Gerade. Ist $\begin{pmatrix} -1\\ -7\\ -6 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}$ der Lotfußpunkt, so gilt, da das Lot senkrecht auf Geradenrichtung steht,

$$\left(\begin{pmatrix} -1\\ -7\\ -6 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 10 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} 0\\ -5\\ -16 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}=-100+50t=0, \text{ also } t=2.$$

Man kann diese Überlegung auch durch Projektion des Vektors von $(-1,-7,-6)$ nach $(-1,-2,10)$, also von $\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 16 \end{pmatrix}$ auf die Geradenrichtung darstellen, diese ist $\dfrac{\begin{pmatrix} 0\\ 5\\ 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}=\dfrac{100}{50}\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}$.

Jedenfalls ist $\begin{pmatrix} -1\\ -7\\ -6 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 4 \end{pmatrix}$ Ortsvektor des Lotfußpunktes. Der Drehmittelpunkt ist somit der Punkt $(5,1,4)$.

Radius des Drehkreises ist die Länge des Lots, also $\left\|\begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1\\ -2\\ 10 \end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix} 6\\ 3\\ -6 \end{pmatrix}\right\|=9$.

Offensichtlich erfolgt die Bewegung in einer zur Geradenrichtung orthogonalen Ebene. Da diese den Drehmittelpunkt enthält, ergibt sie sich zu $\begin{pmatrix} 3\\ 4\\ 5 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5\\ 1\\ 4 \end{pmatrix}\right)=3x+4y+5z-39=0$.

Also erfolgt die Rotation auf einem Kreis mit dem Radius 9 um den Punkt $(5,1,4)$ in der Ebene $3x+4y+5z=39$.

---

6. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\13\\-30\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}20\\4\\-9\end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}-3\\9\\20\end{pmatrix}$.

a) Ermitteln Sie die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonale Richtung!

b) Projizieren Sie die Vektoren $\vec{b}-\vec{a}$ und $\vec{c}-\vec{a}$ auf den bei a) ermittelten Vektor!

c) Ermitteln Sie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{b}+t\vec{v}$ sowie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{c}+t\vec{v}$!

d) Welches der bei c) betrachteten Geradenpaare liegt in einer Ebene? Geben Sie deren Gleichung in parameterfreier Form an!

Lösung:

a) $\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\9\\20\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&1&0\\-3&9&20\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-60\\30\end{pmatrix}\mathrel{\hat{=}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$.

b) Projektion von $\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}-6\\2\\-41\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}-6\\2\\-41\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=\dfrac{-147}{49}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=-3\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$

Projektion von $\vec{c}-\vec{a}=\begin{pmatrix}9\\-7\\-20\end{pmatrix}$: $\dfrac{\begin{pmatrix}9\\-7\\-20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}}\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=\vec{0}$

c) Der Abstand ist die Länge der Projektion eines beliebigen Verbindungsvektors der beiden Geraden, also z.B. von $\vec{b}-\vec{a}$ bzw. von $\vec{c}-\vec{a}$ auf die bei a) ermittelte Richtung des gemeinsamen Lots. Mit dem Ergebnis von b) erhält man

als Abstand zwischen $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{b}+t\vec{v}$: $\left\|-3\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\right\|=3\sqrt{49}=21$ und

als Abstand zwischen $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{c}+t\vec{v}$: $\left\|\vec{0}\right\|=0$.

d) Das erste Geradenpaar ist windschief, das zweite schneidet sich. Also liegt das zweite in einer Ebene. Der Normalenvektor dieser Ebene wurde schon bei a) errechnet, als Punkt der Ebene kann jeder Punkt der beiden Geraden, z.B. also $(11,11,11)$ verwendet werden. Die parameterfreie Ebenengleichung lautet somit

$$\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}11\\11\\11\end{pmatrix}=2x-6y+3z+11=0,$$
$$-2x+6y-3z=11.$$