Aufgabenkomplex 4: Lineare Gleichungssysteme

Letzter Abgabetermin: 9. Januar 2014

---

1. a) Wie müssen die Parameter a und b gewählt werden, damit die Matrix $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ den Rang 0, 1 bzw. 2 hat?

b) Lösen Sie in den drei Fällen das homogene lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\vec{x}=\vec{0}$!

Lösung:

a) Den Rang 0 hat nur die Nullmatrix, also muss da $a=b=0$ sein.

Für den Rang 1 müssen die Zeilen Vielfache voneinander sein. Ist $a\neq 0$, so muss wegen der ersten Komponenten der Zeilen die zweite Zeile das b/a-fache der ersten Zeile sein, also muss dann auch $\frac{b}{a}b=a$ und damit $b^2=a^2$, $b=\pm a$ sein. Analog kann man auch für $b\neq 0$ argumentieren. Tatsächlich haben die Matrizen $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ für $a\neq 0$ den Rang 1. Dieser Rang liegt somit genau dann vor, wenn $b=\pm a\neq 0$ ist.

Der Rang 2 schließlich liegt in allen anderen Fällen vor, d.h., wenn $b\neq\pm a$ ist. (Diese Formulierung schließt auch den Fall $a=b=0$ aus.)

b) Ist der Rang 0, so enthält die Lösung des Gleichungssystems zwei frei wählbare Parameter. Offensichtlich ist jeder Vektor der Ebene Lösung des Gleichungssystems $\begin{matrix} 0x+0y=0 \\ 0x+0y=0 \end{matrix}$. Die allgemeine Lösung kann somit in der Form $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ notiert werden.

Ist der Rang 1, so enthält die Lösung des Gleichungssystems einen frei wählbaren Parameter. Wegen $a\neq 0$ ergibt sich als Lösung von $ax\pm ay=0$ die Gerade $y=\mp x$. Sie kann auch in der Form $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=s\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ notiert werden.

Ist der Rang 2, so ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, es gibt nur den Koordinatenursprung als triviale Lösung: $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 12x_2 + 5x_3 + \lambda x_4 &= \mu . \end{aligned}$$

a) Lösen Sie das Gleichungssystem im Spezialfall $\lambda = 5$, $\mu = 11$ mit dem Gaußschen Algorithmus!

b) Für welche Werte der Parameter λ und μ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, mehrdeutig lösbar bzw. unlösbar?

Lösung:

a) Gaußscher Algorithmus:

$$\begin{array}{rrrr|r}
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
2 & 1 & 4 & 3 & 9 \\
3 & 9 & 1 & 2 & 1 \\
4 & 12 & 5 & 5 & 11 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & -5 & 0 & -5 & -5 \\
0 & 0 & -5 & -10 & -20 \\
0 & 0 & -3 & -11 & -17 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 3 & 11 & 17 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 4 & 7 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 3 & 2 & 0 & 3 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 3 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array} \qquad x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1$$

b) Für die letzte Zeile in obigem Schema ergibt sich

$$\begin{array}{rrrr|r}
4 & 12 & 5 & \lambda & \mu \\ \hline
0 & 0 & -3 & \lambda - 16 & \mu - 28 \\ \hline
0 & 0 & 3 & 16 - \lambda & 28 - \mu \\ \hline
0 & 0 & 0 & 10 - \lambda & 16 - \mu
\end{array}$$

Also ist das Gleichungssystem für $\lambda \neq 10$ eindeutig lösbar, für $\lambda = 10,\ \mu = 16$ mehrdeutig lösbar und für $\lambda = 10,\ \mu \neq 16$ unlösbar.

3. Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})\,z_1 + \ (2+\mathrm{i})\,z_2 &= 11+\mathrm{i}\\ (2+\mathrm{i})\,z_1 + (1+2\mathrm{i})\,z_2 &= 12-\mathrm{i}\end{aligned}$$!

Lösung:

$$\begin{array}{cc|cl}
1+\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 11+\mathrm{i} & \mathrm{I}:2\\
2+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & 12-\mathrm{i} & \\ \hline
1 & \frac32-\frac12\mathrm{i} & 6-5\mathrm{i} & \\
2+\mathrm{i} & 1+2\mathrm{i} & 12-\mathrm{i} & \mathrm{II}-(2+\mathrm{i})\cdot\mathrm{I}\\ \hline
1 & \frac32-\frac12\mathrm{i} & 6-5\mathrm{i} & \\
0 & -\frac52+\frac32\mathrm{i} & -5+3\mathrm{i} & \mathrm{II}:(-\frac52+\frac32\mathrm{i})\\ \hline
1 & \frac32-\frac12\mathrm{i} & 6-5\mathrm{i} & \mathrm{I}+(\frac32-\frac12\mathrm{i})\cdot\mathrm{II}\\
0 & 1 & 2 & \\ \hline
1 & 0 & 3-4\mathrm{i} & \\
0 & 1 & 2 & \text{Somit lautet die Lösung } z_1=3-4\mathrm{i},\ z_2=2.
\end{array}$$

---

4. Für die Produktion von 3 Sorten Mischbrot werden Mischungen von Roggen- und Weizenmehl im Verhältnis 60:40, 70:30 und 80:20 hergestellt. Welche Mengen der drei Mehlmischungen müssen hergestellt werden, um 2 t Roggenmehl und 700 kg Weizenmehl vollständig zu verbrauchen?

Lösung:

gesucht: x: Menge Mischung 60:40, y: Menge Mischung 70:30, z: Menge Mischung 80:20

Roggen: $0.6x+0.7y+0.8z=2\,\mathrm{t}$ $\qquad 6x+7y+8z=20$

Weizen: $0.4x+0.3y+0.2z=0.7\,\mathrm{t}$ $\qquad 4x+3y+2z=7$

$$\begin{array}{ccc|c}
6 & 7 & 8 & 20\\
4 & 3 & 2 & 7\\ \hline
6 & 7 & 8 & 20\\
2 & \frac32 & 1 & \frac72\\ \hline
-10 & -5 & 0 & -8\\
2 & \frac32 & 1 & \frac72\\ \hline
2 & 1 & 0 & \frac85\\
2 & \frac32 & 1 & \frac72\\ \hline
2 & 1 & 0 & \frac85\\
-1 & 0 & 1 & \frac{11}{10}
\end{array}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8/5\\11/10\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

Damit die Lösung sinnvoll ist, müssen alle Komponenten nichtnegativ sein:
$$\begin{aligned}x &= \phantom{\frac{8}{5}-2}u\ge 0, & u&\ge 0,\\ y&=\frac85-2u\ge 0, & 2u&\le\frac85,\ u\le\frac45,\\ z&=\frac{11}{10}+\ u\ge 0, & u&\ge-\frac{11}{10}.\end{aligned}$$

Lösungen ergeben sich damit für alle u mit $0\le u\le\frac45$.

Somit sind u Tonnen Mischung 60:40, $1.6-2u$ Tonnen Mischung 70:30 und $1.1+u$ Tonnen Mischung 80:20 herzustellen, wobei u eine beliebige Zahl mit $0\le u\le 0.8$ ist.

5. Bestimmen Sie ein Polynom $P(x)$ höchstens 5-ten Grades, für welches die Beziehungen $P(1)=-2,\ P'(1)=-7,\ P''(1)=-14,\ P'''(1)=24,\ P(2)=-4,\ P'(2)=25$ gelten!

Lösung:

$$\begin{aligned} P(x) &= a+bx+cx^2+dx^3+ex^4+fx^5 \\ P'(x) &= b+2cx+3dx^2+4ex^3+5fx^4 \\ P''(x) &= 2c+6dx+12ex^2+20fx^3 \\ P'''(x) &= 6d+24ex+60fx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(1) &= a+b+c+d+e+f &&= -2 \\ P'(1) &= b+2c+3d+4e+5f &&= -7 \\ P''(1) &= 2c+6d+12e+20f &&= -14 \\ P'''(1) &= 6d+24e+60f &&= 24 \\ P(2) &= a+2b+4c+8d+16e+32f &&= -4 \\ P'(2) &= b+4c+12d+32e+80f &&= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 1&2&4&8&16&32&-4\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&1&4&12&32&80&25\\ 0&0&2&6&12&20&-14\\ 0&0&0&6&24&60&24 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&3&7&15&31&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&1&4&12&32&80&25\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&4&10&4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&1&3&7&15&31&-2\\ 0&1&4&12&32&80&25\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&4&10&4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&0&1&4&11&26&5\\ 0&0&2&9&28&75&32\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&4&10&4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&1&4&11&26&5\\ 0&0&2&9&28&75&32\\ 0&0&0&1&4&10&4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&5&16&12\\ 0&0&0&3&16&55&46\\ 0&0&0&1&4&10&4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&4&10&4\\ 0&0&0&1&5&16&12\\ 0&0&0&3&16&55&46 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&4&10&4\\ 0&0&0&0&1&6&8\\ 0&0&0&0&4&25&34 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&1&-2\\ 0&1&2&3&4&5&-7\\ 0&0&1&3&6&10&-7\\ 0&0&0&1&4&10&4\\ 0&0&0&0&1&6&8\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&1&0&-4\\ 0&1&2&3&4&0&-17\\ 0&0&1&3&6&0&-27\\ 0&0&0&1&4&0&-16\\ 0&0&0&0&1&0&-4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&1&0&0&0\\ 0&1&2&3&0&0&-1\\ 0&0&1&3&0&0&-3\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&1&0&0&0&0\\ 0&1&2&0&0&0&-1\\ 0&0&1&0&0&0&-3\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&1&0&0&0&0&3\\ 0&1&0&0&0&0&5\\ 0&0&1&0&0&0&-3\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|r} 1&0&0&0&0&0&-2\\ 0&1&0&0&0&0&5\\ 0&0&1&0&0&0&-3\\ 0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&-4\\ 0&0&0&0&0&1&2 \end{array}$$

Somit ist $P(x)=2x^5-4x^4-3x^2+5x-2$.