Aufgabenkomplex 3: Vektoren und Matrizen

Letzter Abgabetermin: 12. Dezember 2013

---

1. Sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{x}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$.

Untersuchen Sie folgende Mengen darauf, ob es sich um lineare Räume handelt:

a) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_3,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,
b) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$,
c) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_4,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,
d) $\{\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_4,\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$!

Wenn ja, geben Sie die Dimension und eine Basis an! Was stellen die Mengen geometrisch dar?

Lösung:

a) Es handelt sich um eine Ebene, die den Punkt $\vec{x}_3$ und die Richtungen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ enthält. Sie ist genau dann linearer Raum, wenn sie den Koordinatenursprung enthält. Also muss es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ geben, für die $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \vec{x}_3 = \vec{0}$ gilt (Das ist gleichbedeutend damit, dass $\vec{x}_3$ Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ ist.):

$$\begin{array}{lll} 2\alpha + 3\beta = 0 & \longrightarrow\ \alpha = -\dfrac{3}{2}\beta & \\ 4\alpha + 5\beta + \ 2 = 0 & & \longrightarrow\ -6\beta + 5\beta + 2 = 0,\ \beta = 2,\ \alpha = -3 \\ 3\alpha - \ \beta + 11 = 0 & & \ 3 \cdot (-3) - 2 + 11 = 0,\ \text{stimmt} \end{array}$$

Also ist $\vec{0} = -3\vec{x}_1 + 2\vec{x}_2 + \vec{x}_3$, das ist äquivalent zu $\vec{x}_3 = 3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2$.

Die Menge ist eine Ebene durch den Koordinatenursprung, sie ist ein linearer Raum mit der Dimension 2. Offensichtlich sind alle Elemente als Linearkombination von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ darstellbar, diese beiden Vektoren sind linear unabhängig. Also ist (z.B.) $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ eine Basis.

b) Offensichtlich ist die Menge ein linearer Raum.

(Es gilt nämlich $(\alpha_1\vec{x}_1 + \beta_1\vec{x}_2 + \gamma_1\vec{x}_3) + (\alpha_2\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \gamma_2\vec{x}_3) = (\alpha_1 + \alpha_2)\vec{x}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\vec{x}_2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\vec{x}_3$ und $\lambda(\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3) = (\lambda\alpha)\vec{x}_1 + (\lambda\beta)\vec{x}_2 + (\lambda\gamma)\vec{x}_3$, die Summe von 2 Elementen und das Produkt eines Elementes mit einem Skalar gehört wieder zu der Menge.)

Aus a) ist bekannt, dass $\vec{x}_3 = 3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2$ gilt. Also ist $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma\vec{x}_3 = \alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 + \gamma(3\vec{x}_1 - 2\vec{x}_2) = (\alpha + 3\gamma)\vec{x}_1 + (\beta - 2\gamma)\vec{x}_2$. Damit ist $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ eine Basis des Raumes, die Dimension ist 2. Es handelt sich um die gleiche Ebene durch den Koordinatenursprung wie bei a).

c) Es handelt sich um eine Ebene, die den Punkt $\vec{x}_4$ und die Richtungen $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ enthält. Sie ist genau dann linearer Raum, wenn sie den Koordinatenursprung enthält. Es entsteht dasselbe Gleichungssystem wie bei a), nur dass in der 3. Zeile statt der Zahl 11 die Zahl 12 steht. Aus den ersten beiden Zeilen erhält man wieder $\alpha = -3$, $\beta = 2$, dann ist aber $3\alpha - \beta + 12 = 1 \neq 0$. Also ist das Gleichungssystem unlösbar, der Koordinatenursprung gehört nicht zu der Ebene.

Die Menge ist eine Ebene, die den Koordinatenursprung nicht enthält. Sie ist kein linearer Raum.

d) Analog zu b) liegt ein linearer Raum vor. Nach c) ist $\vec{x}_4$ von $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ linear unabhängig, die beiden Vektoren sind auch untereinander linear unabhängig. Also sind $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ und $\vec{x}_4$ drei linear unabhängige Vektoren und damit auch eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Die drei Vektoren spannen den gesamten Raum $\mathbb{R}^3$ auf.

Die Menge ist der Raum $\mathbb{R}^3$, die Dimension ist 3. Eine Basis ist z.B. $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_4\}$, man könnte aber auch die kanonische Basis verwenden.

---

2. Eine in Richtung der Winkelhalbierenden des IV. Quadranten der x-z-Ebene wirkende Kraft verrichte an einem Körper auf der geraden Strecke vom Punkt $(13, -10, 18)$ zum Punkt $(9, 2, 4)$ eine Arbeit von 141 J, wobei als Längeneinheit cm verwendet wurde. Bestimmen Sie den Betrag der Kraft in kN!

Lösung:

Sie F der Betrag der Kraft, dann gilt $\vec{F} = F\dfrac{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\|} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Der zurückgelegte Weg beträgt $\vec{s} = \begin{pmatrix}9\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}13\\-10\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\12\\-14\end{pmatrix}$ [cm].

Folglich ist $W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \dfrac{F}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\12\\-14\end{pmatrix}$ cm $= \dfrac{10F}{\sqrt{2}}$ cm $= 5\sqrt{2}F$ cm $= 141$ J $= 141$ Nm.

Daraus folgt $F = \dfrac{141 \text{ Nm}}{5\sqrt{2}\,\frac{1}{100}\text{ m}} = \dfrac{14\,100}{5\sqrt{2}}\text{ N} \approx \dfrac{10\,000}{5}\text{ N} = \underline{\underline{2\text{ kN}}}$.

---

3. a) Wie kann der Winkel zwischen zwei vom Nullvektor verschiedenen Vektoren im Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) allgemein definiert werden? Welche Werte kann der so definierte Winkel annehmen?

b) Die in a) anzugebende Definition kann auch im $\mathbb{R}^1$, d.h. in der Menge der reellen Zahlen, angewendet werden. Begründen Sie, welche Werte der so definierte Winkel zwischen zwei von Null verschiedenen reellen Zahlen annehmen kann!

Lösung:

a) (2 Punkte)

$\varphi = \arccos \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|}$. Der Winkel kann zwischen je einschließlich 0 und $\pi \,\hat{=}\, 180^\circ$ liegen (Wertebereich des Arkuskosinus).

b) (2 Punkte)

Im $\mathbb{R}^1$ gilt $\|\vec{x}\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|$. Der Ausdruck $\dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|} = \dfrac{xy}{|x|\,|y|}$ ist gleich 1 oder -1 je nachdem, ob x und y gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben. Wegen $\arccos 1 = 0$ und $\arccos -1 = \pi$ kann der Winkel deshalb die Werte 0 und $\pi \,\hat{=}\, 180^\circ$ annehmen.

4. Eine Elektronikfirma stellt aus Draht, Spulen und Widerständen Baugruppen B_1, B_2 und B_3 und aus den Baugruppen und aus Draht Geräte G_1 und G_2 her. Im Einzelnen werden für eine Baugruppe B_1 12 Einheiten Draht, 3 Spulen und 2 Widerstände, für eine Baugruppe B_2 15 Einheiten Draht, 2 Spulen und 4 Widerstände und für eine Baugruppe B_3 10 Einheiten Draht, 2 Spulen und 2 Widerstände benötigt. Für ein Gerät G_1 werden 2 Baugruppen B_1, eine Baugruppe B_3 und 20 Einheiten Draht benötigt, während für ein Gerät G_2 je eine Baugruppe B_1, B_2 und B_3 sowie 30 Einheiten Draht benötigt werden.

a) Geben Sie die Aufwandsmatrizen für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Baugruppen, für den Zusammenhang von Baugruppen und Geräten sowie für den Zusammenhang von Ausgangsmaterial und Geräten an!

b) Ein Kunde bestellt 1000 Geräte G_1, 800 Geräte G_2 und für Austauschzwecke 100 Baugruppen B_1, 20 Baugruppen B_2 und 50 Baugruppen B_3. Welche Mengen an Ausgangsmaterial werden benötigt?

Lösung:

a) Ausgangsmaterial — Baugruppen

	je B_1	je B_2	je B_3
Draht	12	15	10
Spule	3	2	2
Widerstand	2	4	2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Baugruppen — Geräte

	je G_1	je G_2
B_1	2	1
B_2	0	1
B_3	1	1

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ausgangsmaterial — Geräte

direkt

	je G_1	je G_2
Draht	20	30
Spule	0	0
Widerstand	0	0

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 20 & 30 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über Baugruppen:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 37 \\ 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

insgesamt also $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 54 & 67 \\ 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

b) $$\boldsymbol{D} \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \end{pmatrix} + \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 67 \\ 8 & 7 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 800 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 107\,600 \\ 13\,600 \\ 12\,400 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2000 \\ 440 \\ 380 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109\,600 \\ 14\,040 \\ 12\,780 \end{pmatrix}$$

Es werden 109 600 Einheiten Draht, 14 040 Spulen und 12 780 Widerstände benötigt.

5. $\boldsymbol{A}$ sei eine beliebige Matrix. Mit welcher Matrix $\boldsymbol{B}$ muss man die Matrix $\boldsymbol{A}$ von rechts multiplizieren (d.h. $\boldsymbol{AB}$ berechnen), damit

a) die 1. Spalte verdoppelt wird,

b) eine einspaltige Matrix entsteht, deren Komponenten die Summen der Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ sind,

c) von der 2. Spalte das Dreifache der 1. Spalte abgezogen wird,

d) die letzte und die vorletzte Spalte vertauscht werden,

e) die Spalten in entgegengesetzter Reihenfolge entstehen, d.h. die letzte Spalte zur 1. Spalte wird usw.?

Wie müsste die Aufgabenstellung geändert werden, um die gleichen Effekte für Zeilen zu erreichen?

Lösung:

a)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 2a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 2a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 2a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$2 \ast$ Element aus 1. Spalte

b)
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$1 \ast$ Element jeder Spalte und addieren

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$-3 \ast$ Element aus 1. Spalte $+ 1 \ast$ Element aus 2. Spalte

d) $$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-3,1} & \cdots & a_{m-3,n-3} & a_{m-3,n-2} & a_{m-3,n-1} & a_{m-3,n} \\ a_{m-2,1} & \cdots & a_{m-2,n-3} & a_{m-2,n-2} & a_{m-2,n-1} & a_{m-2,n} \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-3} & a_{m-1,n-2} & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-3} & a_{m,n-2} & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-3} & a_{1,n-2} & a_{1n} & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-3,1} & \cdots & a_{m-3,n-3} & a_{m-3,n-2} & a_{m-3,n} & a_{m-3,n-1} \\ a_{m-2,1} & \cdots & a_{m-2,n-3} & a_{m-2,n-2} & a_{m-2,n} & a_{m-2,n-1} \\ a_{m-1,1} & \cdots & a_{m-1,n-3} & a_{m-1,n-2} & a_{m-1,n} & a_{m-1,n-1} \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,n-3} & a_{m,n-2} & a_{mn} & a_{m,n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$
$1 \ast$ Element aus vorletzter Spalte
$1 \ast$ Element aus letzter Spalte

e) $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ usw.
$1 \ast$ Element aus vorletzter Spalte
$1 \ast$ Element aus letzter Spalte

Um die entsprechenden Effekte für die Zeilen auszulösen, müsste die Multiplikation von links erfolgen. Wegen $(\boldsymbol{AB})^\mathsf{T} = \boldsymbol{B}^\mathsf{T}\boldsymbol{A}^\mathsf{T}$ wäre dabei jeweils die transponierte zu der oben angegebenen Matrix zu verwenden.