Aufgabenkomplex 2: Umrechnung von Einheiten, Mengenlehre, Ungleichungen, Komplexe Zahlen

Letzter Abgabetermin: 21. November 2013

---

1. Ein Textverarbeitungsprogramm hat als Voreinstellungen für die Seitengröße

(A) für den amerikanischen Markt das Letterformat (8,5 x 11″) mit Seitenrändern von je 1″ und

(E) für den europäischen Markt das A4-Format (21 x 29,7 cm) mit Seitenrändern links, rechts und oben von 2,5 cm, unten von 2 cm.

a) Welche Fläche haben die Satzspiegel in den beiden Versionen in cm^2?

b) Ein längeres Dokument, das auch Zeichnungen im Maßstab 1:100 und Bilder mit einer Auflösung von 300 dpi enthält, ist im Format (A) angefertigt worden, soll aber im Format (E) ausgegeben werden. Da eine Neuformatierung zu aufwändig ist, sollen die Seiten proportional so angepasst werden, dass der zur Verfügung stehende Platz so gut wie möglich genutzt wird. Auf wieviel Prozent ändert sich dabei die tatsächlich genutzte Fläche? Welchen Maßstab bekommen die Zeichnungen, welche Auflösung die Bilder, wenn deren Pixelzahl unverändert bleibt?

c) Beantworten Sie die gleichen Fragen für den Fall, dass das Dokument im Format (E) angefertigt und im Format (A) ausgegeben werden soll!

Lösung:

a) (A) $6{,}5 \cdot 9 \cdot (2{,}54\text{ cm})^2 = 377{,}4186\text{ cm}^2$, (B) $16 \cdot 25{,}2\text{ cm}^2 = 403{,}2\text{ cm}^2$

b) Der Satzspiegel von 6,5 x 9″ entspricht 16,51 x 22,86 cm. Die Textbreite muss auf 16 cm verringert werden, das entspricht einer Skalierung auf $16/16{,}51 \approx 96{,}91$ %. Die Texthöhe, die ohnehin schon kleiner ist als beim Format (E) muss wegen der proportionalen Anpassung auf denselben Prozentsatz vermindert werden. Somit vermindert sich die genutzte Fläche auf $(16/16{,}51)^2 \approx 93{,}92$ % der ursprünglich genutzten Fläche.

Der Zeichungsmaßstab ändert sich von $1:100$ auf $\dfrac{16}{16{,}51} \cdot 1:100 = 1:\dfrac{16{,}51}{16}100 \approx 1:103{,}19$.

Die Bilderauflösung ändert sich von $\dfrac{300\text{ Pixel}}{1''}$ auf $\dfrac{300\text{ Pixel}}{\frac{16}{16{,}51} \cdot 1''} = \dfrac{16{,}51}{16} 300\text{ dpi} \approx 309{,}56\text{ dpi}$.

c) Diesmal muss die Texthöhe von 25,2 cm auf 22,86 cm verringert werden, das entspricht einer Skalierung auf $22{,}86/25{,}2 \approx 90{,}71$ %. Die Textbreite, die beim (E)-Format ohnehin schon schmaler als beim (A)-Format ist, muss wegen der proportionalen Anpassung auf denselben Prozentsatz vermindert werden. Somit vermindert sich die genutzte Fläche auf $(22{,}86/25{,}2)^2 \approx 82{,}29$ % der ursprünglich genutzten Fläche.

Der Zeichungsmaßstab ändert sich von $1:100$ auf $\dfrac{22{,}86}{25{,}2} \cdot 1:100 = 1:\dfrac{25{,}2}{22{,}86}100 \approx 1:110{,}24$.

Die Bilderauflösung ändert sich von $\dfrac{300\text{ Pixel}}{1''}$ auf $\dfrac{300\text{ Pixel}}{\frac{22{,}86}{25{,}2} \cdot 1''} = \dfrac{25{,}2}{22{,}86} 300\text{ dpi} \approx 330{,}71\text{ dpi}$.

2. Es seien folgende Mengen gegeben: $A=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ 2(x-1)^2+y\le -1\}$,
$B=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ (x-1)^2+(y+1)^2\le 4\}$, $C=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R},\ x\ge 0\}$.

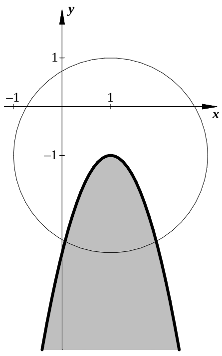
a) Stellen Sie A, B, $A\cap B$, $A\cup B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$ grafisch dar!

b) Stellen Sie $(A\cup B)\cap C$ und $(A\cap B)\cup C$ grafisch dar!

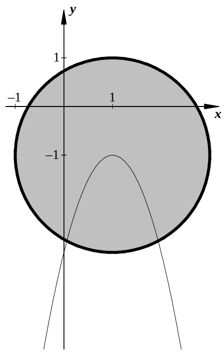
Lösung:

A: $y\le -2(x-1)^2-1$, d.h. alle Punkte unterhalb und auf der Parabel $y=-2(x-1)^2-1$,
B: alle Punkte innerhalb und auf dem Kreis mit Radius 2 um den Punkt $(1,-1)$,
C: alle Punkte im I. und IV. Quadranten einschließlich der y–Achse

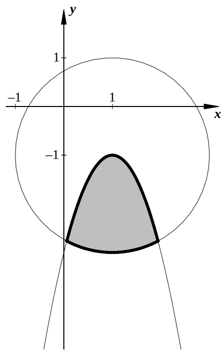
a)



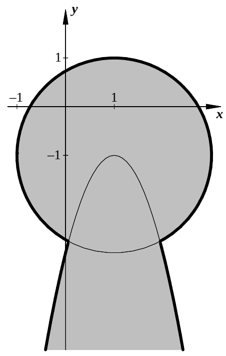
A



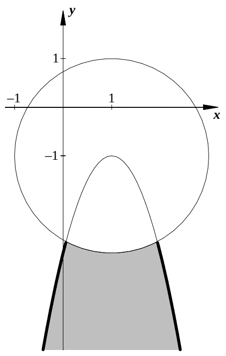
B



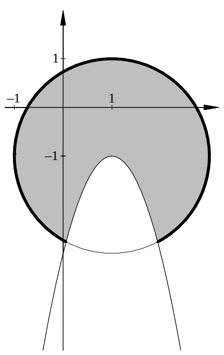
$A\cap B$



$A\cup B$

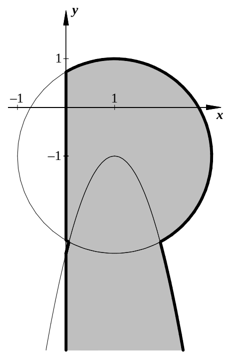


$A\backslash B$

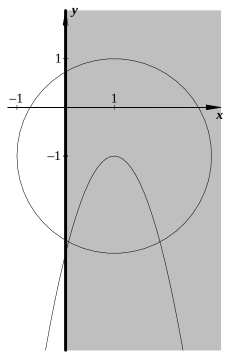


$B\backslash A$

b)



$(A\cup B)\cap C$



$(A\cap B)\cup C$

---

3. Für welche reellen x sind folgende Ungleichungen erfüllt:

a) $\left|2-\frac{x}{3}\right|+\left|\frac{x}{5}+1\right|\le 3$, b) $\frac{x^2+2x-12}{x^2+8x+15}\ge 1$?

Lösung:

a) Beitrag zur Lösung

$$\begin{array}{lllll}
x<-5: & 2-\frac{x}{3}-\frac{x}{5}-1\le 3, & -2\le\frac{8}{15}x, & x\ge-\frac{15}{4} & \emptyset\\
-5\le x\le\ 6: & 2-\frac{x}{3}+\frac{x}{5}+1\le 3, & 0\le\frac{2}{15}x, & x\ge 0 & 0\le x\le 6\\
6<x\quad : & \frac{x}{3}-2+\frac{x}{5}+1\le 3, & \frac{8}{15}x\le 4, & x\le\frac{15}{2} & 6<x\le\frac{15}{2}
\end{array}$$

Als Lösungsmenge ergibt sich somit das Intervall $\left[0,\frac{15}{2}\right]$.

b) $x^2+8x+15=0$ für $x_{1/2}=-4\pm\sqrt{16-15}=\begin{cases}-3\\-5\end{cases}$,

$$\text{d.h. } x^2+8x+15=(x+3)(x+5)\begin{cases} >0, & x<-5 \lor x>-3 \\ =0, & x=-5 \lor x=-3 \\ <0, & -5<x<-3 \end{cases}$$

		Beitrag zur Lösung
$x<-5 \lor x>-3:$	$x^2+2x-12 \geq x^2+8x+15, \quad -27 \geq 6x, \quad x \leq -\frac{9}{2}$	$x<-5$
$x=-5 \lor x=-3:$	nicht definiert	$\emptyset$
$-5<x<-3:$	$x^2+2x-12 \leq x^2+8x+15, \quad -27 \leq 6x, \quad x \geq -\frac{9}{2}$	$-\frac{9}{2} \leq x<-3$

Als Lösungsmenge ergibt sich somit $(-\infty,-5) \cup \left[-\frac{9}{2},-3\right)$.

---

4. Sei $z = x+\mathrm{i}y$ und es gelte $|z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}$.

a) Beschreiben Sie den Sachverhalt durch eine reelle Ungleichung für x und y !

b) Skizzieren Sie $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(z)|}\}$!

Hinweis zu b): quadratische Ergänzung

Lösung:

a) Setzt man die Darstellung von z in die Ungleichung ein, so ergibt sich:

$$|x+\mathrm{i}y| \leq \sqrt{|\mathrm{Re}(x+\mathrm{i}y)|} \iff \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{|x|} \iff x^2+y^2 \leq |x|.$$

b) Zum Auflösen des Betrages führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: $x \geq 0$ Betragszeichen werden weggelassen. Erhalten

$$x^2+y^2 \leq x \iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

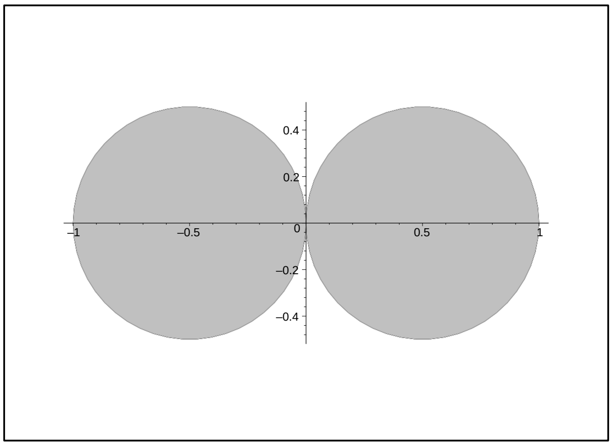
Dies entspricht einer Kreisfläche mit Mittelpunkt $(1/2,0)$ und Radius $1/2$ einschließlich Rand. Ihre Punkte haben alle eine nichtnegative x-Koordinate, so dass sie vollständig zur gesuchten Menge gehört.

2. Fall: $x < 0$ Betragszeichen durch Multiplikation mit -1 ersetzen. Erhalten

$$x^2+y^2 \leq -x \iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Dies entspricht einer Kreisfläche mit Mittelpunkt $(-1/2,0)$ und Radius $1/2$ einschließlich Rand. Ihre Punkte haben alle eine negative x-Koordinate, so dass sie vollständig zur gesuchten Menge gehört (bis auf $(0,0)$, dieser Punkt ist aber schon im anderen Kreis enthalten).

Damit ergibt sich folgendes Bild:



5. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a+b\mathrm{i}$ und in Polarform dar:

a) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$, b) $\dfrac{15-9\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})^2+1-3\mathrm{i}}$!

Lösung:

a) (3 Punkte)

$$\left(\frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2=\frac{1+2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1-2\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}=\frac{1+2\mathrm{i}-1}{1-2\mathrm{i}-1}=\frac{2\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\underline{\underline{-1=1\,(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)}}$$

b) (4 Punkte)

$$\frac{15-9\mathrm{i}}{(2+\mathrm{i})^2+1-3\mathrm{i}}=\frac{15-9\mathrm{i}}{4+4\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+1-3\mathrm{i}}=\frac{15-9\mathrm{i}}{4+\mathrm{i}}=\frac{(15-9\mathrm{i})(4-\mathrm{i})}{(4+\mathrm{i})(4-\mathrm{i})}=\frac{60-15\mathrm{i}-36\mathrm{i}+9\mathrm{i}^2}{16-\mathrm{i}^2}=\frac{51-51\mathrm{i}}{17}$$

$$=\underline{\underline{3-3\mathrm{i}=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4}\right)}}$$

($|3-3\mathrm{i}|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, Richtung der Winkelhalbierenden des IV. Quadranten)

---

6. Ermitteln Sie die Lösung der Gleichung $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})\,z=\dfrac{12}{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}$, geben Sie diese in algebraischer und in Polardarstellung an! Berechnen Sie außerdem die sechste Potenz dieser Lösung!

Lösung:

$$z=\frac{12}{(3+\sqrt{3}\mathrm{i})(1-\sqrt{3}\mathrm{i})}=\frac{12}{3-3\sqrt{3}\mathrm{i}+\sqrt{3}\mathrm{i}+3}=\frac{12}{6-2\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{6}{3-\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{6\,(3+\sqrt{3}\mathrm{i})}{(3-\sqrt{3}\mathrm{i})(3+\sqrt{3}\mathrm{i})}$$

$$=\frac{6\,(3+\sqrt{3}\mathrm{i})}{12}=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\quad\text{(algebraische Darstellung)}$$

$$|z|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3},\quad \varphi=\arctan\frac{\sqrt{3}/2}{3/2}=\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\quad\text{(da I. Quadrant)}$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\quad\text{(Polardarstellung)}$$

$$z^6=\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^6=\sqrt{3}^6\left(\cos\frac{6\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{6\pi}{6}\right)=3^3\,(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=27\cdot(-1)=-27$$