Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

14. Oktober 2013

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 1: Grundlagen

Letzter Abgabetermin: 1. November 2013
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 1“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!

Elektronische Hilfsmittel dürfen nur zur zahlenmäßigen Rechnung bei Aufgabe 2 eingesetzt werden!

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

   a) $\dfrac{a^5-b^5}{b^5-a^5}$, b) $\left(\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cot\dfrac{\pi}{3}+\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$, c) $\left(\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

   d) $\sqrt[24]{x^{3^3}\Big/\left(x^{3^2}\,(x^3)^2\right)}$ e) $\dfrac{x^6-x^5+2x^4+10x^3-4x^2+16x+32}{x^3+2x+4}$, f) $\dfrac{(\tan^2 x)^3\cos^5 x}{\tan x\,\sin^4 x}$,

   g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{20}{x^2+x-6}-\dfrac{3}{x^2+3x}$, h) $\dfrac{(3\ln x+2\ln xy+\ln y)\ln\dfrac{1}{x}}{\ln\dfrac{1}{x^5y^3}}$!

2. Das Verhältnis der Differenz von Verkaufs- und Einkaufspreis zum Verkaufspreis einer Ware wird als Handelsspanne bezeichnet. Eine Faustregel des Handels lautet, dass bei 10 % Preisnachlass der Umsatz um 70 % steigen muss, um den gleichen Gewinn zu erzielen. Von welcher Handelsspanne beim nicht rabattierten Preis muss man ausgehen, um zu dieser Aussage zu gelangen?

3. Für den Besuch einer Veranstaltung gilt „*Studenten zahlen den ermäßigten Eintrittspreis*“. Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?
   a) Der Besucher ist Student.
   b) Der Besucher ist kein Student.
   c) Der Besucher zahlt den ermäßigten Preis.
   d) Der Besucher zahlt den vollen Preis.
   e) Eine Besuchergruppe besteht nur aus Studenten.
   f) Eine Besuchergruppe besteht aus Studenten und Nichtstudenten.
   g) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den vollen Preis.
   h) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den ermäßigten Preis.

4. Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	6	5	4	3	2	1
b_{1n}	7	8	9	10	11	12
b_{2n}	−1	−2	−3	−4	−5	−6
b_{3n}	1	−1	1	−1	1	−1

Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{2} a_{2n},\ \sum_{i=0}^{4}(a_i+1),\ \sum_{i=0}^{4} a_{i+1},\ \sum_{i=0}^{4} a_i+1,\ \sum_{i=1}^{3} b_{ii},$$

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=3}^{5} b_{ij},\ \sum_{k=1}^{3} b_{3k}b_{k5},\ \sum_{l=1}^{3}\left(l\sum_{m=l+1}^{4} b_{lm}\right) !$$

b.w.

5. m Ziegeleien beliefern über einen Zeitraum von einem Jahr n Baustellen. Es bezeichne B_{ij} den Bedarf an Ziegelsteinen von Baustelle i im Monat j sowie K_{ij} die Lieferkapazität der Ziegelei i im Monat j. Drücken Sie folgende Sachverhalte unter Verwendung des Summenzeichens in Formeln aus:

   a) Die Baustelle 5 benötigt im II. Quartal 1 Mio. Steine.
   b) Im Monat November haben die Ziegeleien eine Gesamtlieferkapazität von 1,5 Mio. Steinen.
   c) Im Oktober macht die Lieferkapazität von Ziegelei 3 mehr als 40 % der Kapazität aller Ziegeleien aus.
   d) Der Bedarf aller Baustellen außer 1 und 2 im Mai kann allein durch Ziegelei 1 gedeckt werden.
   e) Im Februar reichen die Lieferungen der Ziegeleien 3 bis 5 nicht aus, den Bedarf der Baustellen 4 bis 7 zu decken.
   f) Mehr als die Hälfte des Gesamtjahresbedarfs aller Baustellen wird im II. Halbjahr von den Baustellen 1 bis 6 benötigt.

Aufgabenkomplex 1: Grundlagen

Letzter Abgabetermin: 1. November 2013

---

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\dfrac{a^5-b^5}{b^5-a^5}$, b) $\left(\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\cot\dfrac{\pi}{3}+\cot\dfrac{\pi}{6}\right)$, c) $\left(\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$,

d) $\sqrt[24]{x^{3^3}\Big/\left(x^{3^2}\left(x^3\right)^2\right)}$ e) $\dfrac{x^6-x^5+2x^4+10x^3-4x^2+16x+32}{x^3+2x+4}$, f) $\dfrac{\left(\tan^2 x\right)^3\cos^5 x}{\tan x\,\sin^4 x}$,

g) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{20}{x^2+x-6}-\dfrac{3}{x^2+3x}$, h) $\dfrac{(3\ln x+2\ln xy+\ln y)\ln\dfrac{1}{x}}{\ln\dfrac{1}{x^5y^3}}$!

Lösung:

a) $\dfrac{a^5-b^5}{b^5-a^5}=\dfrac{a^5-b^5}{-(a^5-b^5)}=-1$

b)
$$\begin{aligned}\left(\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{6}\right)\left(\cot\frac{\pi}{3}+\cot\frac{\pi}{6}\right)&=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)\\&=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}\right)\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)&=\left(\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}\right)\left(\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}\right)\\&=\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

d) $\sqrt[24]{x^{3^3}\Big/\left(x^{3^2}\left(x^3\right)^2\right)}=\sqrt[24]{x^{27}/(x^9x^6)}=\sqrt[24]{x^{12}}=\sqrt{|x|}$

($\sqrt{x}$ ist als Ergebnis für negative x offensichtlich falsch!)

e) $(x^6-x^5+2x^4+10x^3-4x^2+16x+32):(x^3+2x+4)=x^3-x^2+8$

$$\begin{array}{lllll}
\underline{x^6} & \underline{+2x^4+} & \underline{4x^3} & & \\
-x^5 & + & 6x^3 & -4x^2 & +16x+32\\
\underline{-x^5} & \underline{-} & \underline{2x^3} & \underline{-4x^2} & \\
 & & 8x^3 & & +16x+32\\
 & & \underline{8x^3} & \underline{} & \underline{+16x+32}\\
 & & & & \hfill 0
\end{array}$$

f) $\dfrac{\left(\tan^2 x\right)^3\cos^5 x}{\tan x\,\sin^4 x}=\dfrac{\tan^6 x\,\cos^5 x}{\tan x\,\sin^4 x}=\dfrac{\tan^5 x\,\cos^5 x}{\sin^4 x}=\dfrac{\sin^5 x\,\cos^5 x}{\cos^5 x\,\sin^4 x}=\sin x$

g) $x^2+x-6=0$ für $x_1/2=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{24}{4}}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{5}{2}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$, d.h. $x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{2x}{x-2}-\dfrac{5}{x+3}-\dfrac{20}{x^2+x-6}-\dfrac{3}{x^2+3x}$

$$= \frac{(x-2)(x+3)\ +\ 2x^2(x+3)\ -\ 5x(x-2)\ -\ 20x\ -\ 3(x-2)}{x(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2+x-6+2x^3+6x^2-5x^2+10x-20x-3x+6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{2x^3+2x^2-12x}{x(x-2)(x+3)} = \frac{2x(x-2)(x+3)}{x(x-2)(x+3)} = 2$$

h) $$\frac{(3\ln x + 2\ln xy + \ln y)\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{1}{x^5y^3}} = \frac{(\ln x^3 + \ln x^2y^2 + \ln y)(\ln 1 - \ln x)}{\ln 1 - \ln x^5y^3} = \frac{-\ln x^5y^3\ \cdot\ \ln x}{-\ln x^5y^3} = \ln x$$

---

2. Das Verhältnis der Differenz von Verkaufs- und Einkaufspreis zum Verkaufspreis einer Ware wird als Handelsspanne bezeichnet. Eine Faustregel des Handels lautet, dass bei 10 % Preisnachlass der Umsatz um 70 % steigen muss, um den gleichen Gewinn zu erzielen. Von welcher Handelsspanne beim nicht rabattierten Preis muss man ausgehen, um zu dieser Aussage zu gelangen?

Lösung:

Üblicherweise bezeichnet man als Handelsspanne den dem Händler verbleibenden Anteil am Verkaufspreis, d.h. $\text{Handelsspanne} = \dfrac{\text{Verkaufspreis } - \text{Einkaufspreis}}{\text{Verkaufspreis}} = \dfrac{V-E}{V}$.

Der Umsatz ergibt sich durch Multiplikation der verkauften Stückzahl mit dem Preis. Ist n die zum nicht rabattierten Preis V und n_R die zum rabattierten Preis V_R verkaufbare Stückzahl, so bedeutet eine Umsatzsteigerung von 70 % bei einem Preisnachlass von 10 %

$1.7\,n\,V = n_R\,V_R = n_R\,0.9\,V$.

Der Gewinn ergibt sich durch Multiplikation der verkaufbaren Stückzahl mit der Differenz von Verkaufs- und Einkaufspreis. Gleichheit des Gewinns heißt also

$n\,(V-E) = n_R\,(V_R - E) = n_R\,(0.9V - E)$.

Zur Berechnung der Handelsspanne müssen die nicht in sie eingehenden Größen n und n_R eliminiert werden. Aus der ersten Gleichung ergibt sich $n_R = \dfrac{1.7}{0.9}n = \dfrac{17}{9}n$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
n\,(V-E) &= \frac{17}{9}n\,(0.9V-E)\\
V-E &= \frac{17}{9}\,(0.9V-E)\\
V-E &= \frac{17}{9}0.9V - \frac{17}{9}E\\
\frac{17}{9}E - E &= \frac{17}{9}0.9V - V\\
\frac{17-9}{9}E &= \frac{17\cdot 0.9-9}{9}V\\
8E &= 6.3V, \qquad\qquad E = 0.7875V
\end{aligned}$$

Also beträgt der Einkaufspreis 78,75 % vom nicht rabattierten Verkaufspreis, die Handelsspanne damit $1-0{,}7875 = \underline{\underline{21{,}25\ \%}}$.

3. Für den Besuch einer Veranstaltung gilt „*Studenten zahlen den ermäßigten Eintrittspreis*“. Aus welchen der folgenden Aussagen können aufgrund dieser Implikation Folgerungen gezogen werden, wenn ja, welche?

a) Der Besucher ist Student.
b) Der Besucher ist kein Student.
c) Der Besucher zahlt den ermäßigten Preis.
d) Der Besucher zahlt den vollen Preis.
e) Eine Besuchergruppe besteht nur aus Studenten.
f) Eine Besuchergruppe besteht aus Studenten und Nichtstudenten.
g) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den vollen Preis.
h) Alle Personen einer Besuchergruppe zahlen den ermäßigten Preis.

Lösung:

a) Ja: Der Besucher zahlt den ermäßigten Preis.
b) Nein.
c) Nein.
d) Ja: Der Besucher ist kein Student.
e) Ja: Alle Personen der Gruppe zahlen den ermäßigten Preis.
f) Ja: Einige Personen der Gruppe zahlen den ermäßigten Preis. (Ob alle das tun, ist aber nicht bekannt.)
g) Ja: Keine Person der Gruppe ist Student.
h) Nein.

---

4. Gegeben seien folgende Größen:

n	0	1	2	3	4	5
a_n	6	5	4	3	2	1
b_{1n}	7	8	9	10	11	12
b_{2n}	−1	−2	−3	−4	−5	−6
b_{3n}	1	−1	1	−1	1	−1

Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{2} a_{2n},\ \sum_{i=0}^{4}(a_i+1),\ \sum_{i=0}^{4} a_{i+1},\ \sum_{i=0}^{4} a_i+1,\ \sum_{i=1}^{3} b_{ii},$$
$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=3}^{5} b_{ij},\ \sum_{k=1}^{3} b_{3k}b_{k5},\ \sum_{l=1}^{3}\left(l\sum_{m=l+1}^{4} b_{lm}\right)\ !$$

Lösung:

a) $\sum_{n=0}^{2} a_{2n} = a_0+a_2+a_4 = 6+4+2 = 12$

b) $\sum_{i=0}^{4}(a_i+1) = (a_0+1)+(a_1+1)+(a_2+1)+(a_3+1)+(a_4+1) = 7+6+5+4+3 = 25$

c) $\sum_{i=0}^{4} a_{i+1} = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 5+4+3+2+1 = 15$

d) $\sum_{i=0}^{4} a_i+1 = a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+1 = 6+5+4+3+2+1 = 21$

e) $\sum_{i=1}^{3} b_{ii} = b_{11}+b_{22}+b_{33} = 8-3-1 = 4$

f) $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=3}^{5} b_{ij} = \sum_{i=1}^{2}\left(\sum_{j=3}^{5} b_{ij}\right) = (10+11+12)+(-4-5-6) = 18$

g) $\sum_{k=1}^{3} b_{3k}b_{k5} = b_{31}b_{15}+b_{32}b_{25}+b_{33}b_{35} = (-1)\cdot 12+1\cdot(-6)+(-1)\cdot(-1) = -17$

h) $\sum_{l=1}^{3}\left(l\sum_{m=l+1}^{4} b_{lm}\right)=\sum_{m=2}^{4} b_{1m}+2\sum_{m=3}^{4} b_{2m}+3b_{34}=1\cdot(9+10+11)+2\cdot(-4-5)+3\cdot 1=15$

---

5. m Ziegeleien beliefern über einen Zeitraum von einem Jahr n Baustellen. Es bezeichne B_{ij} den Bedarf an Ziegelsteinen von Baustelle i im Monat j sowie K_{ij} die Lieferkapazität der Ziegelei i im Monat j. Drücken Sie folgende Sachverhalte unter Verwendung des Summenzeichens in Formeln aus:

a) Die Baustelle 5 benötigt im II. Quartal 1 Mio. Steine.
b) Im Monat November haben die Ziegeleien eine Gesamtlieferkapazität von 1,5 Mio. Steinen.
c) Im Oktober macht die Lieferkapazität von Ziegelei 3 mehr als 40 % der Kapazität aller Ziegeleien aus.
d) Der Bedarf aller Baustellen außer 1 und 2 im Mai kann allein durch Ziegelei 1 gedeckt werden.
e) Im Februar reichen die Lieferungen der Ziegeleien 3 bis 5 nicht aus, den Bedarf der Baustellen 4 bis 7 zu decken.
f) Mehr als die Hälfte des Gesamtjahresbedarfs aller Baustellen wird im II. Halbjahr von den Baustellen 1 bis 6 benötigt.

Lösung:

a) $\sum_{j=4}^{6} B_{5j}=1.000.000$

b) $\sum_{i=1}^{m} K_{i,11}=1.500.000$

c) $K_{3,10}>0{,}4\sum_{i=1}^{m} K_{i,10}$

d) $\sum_{i=3}^{n} B_{i5}\leq K_{15}$

e) $\sum_{i=3}^{5} K_{i2}<\sum_{i=4}^{7} B_{i2}$

f) $\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=7}^{12} B_{ij}>0{,}5\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{12} B_{ij}$