Technische Universität Chemnitz Prof. Martini
Fakultät für Mathematik Georg Nestmann

Ergänzungskurs Elementarmathematik für Bachelor WS2013/2014

Klausurvorbereitung Teil II - Lösungen

Matrizen und Gleichungssysteme

1. $(A\,,B\,,C\,,D) = (42+2t\,,38-t\,,20-2t\,,t)$ für $t \in \{0,...,10\}$.
2. $X = (F^{-1}D - B)(A + C^T + 2E)^{-1}$
3. a) $M_1 = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $M_{ges} = M_1 M_2 = \begin{pmatrix} 20 & 24 \\ 7 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$.

   b) $(H\,,M\,,S) = (2300\,,780\,,1030)$

   c) $\begin{pmatrix} 22 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 2 & 20 & 24 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & 2 & 8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t_1 - t_2 \\ -t_2 \\ 5 - 4t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

4. $rang(A) = 2$

   $$x = \begin{pmatrix} -4 - 6t_1 - 5t_2 \\ \frac{7}{2} + \frac{3}{2}t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, \text{ mit } t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

5.
   - $det(A) = a - 2 \Rightarrow rang(A) = 3$ für $a \neq 2$, für $a = 2$ ergibt sich $rang(A) = 2$.
   - A^{-1} existiert $\iff det(A) \neq 0 \iff a \neq 2$
     für $a \neq 2$:
     $$A^{-1} = \frac{1}{a-2} \begin{pmatrix} a-12 & 9-2a & 5 \\ 8 & a-6 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   - für $a = 3$: $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
   - $rang(AB^T) = \left\{ \begin{matrix} 2, falls\ a \neq 0 \\ 1, falls\ a = 0 \end{matrix} \right\}$

6. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ $ABCD$ ist Parallelogramm.

b) Durchfluss $D = \left| \left\langle \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \right), \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left| det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right| = 1 \frac{m^3}{s} = 1000 \frac{l}{s}$

7. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 + 3t_1 - 5t_2 \\ 21 - 2t_1 + 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, falls $\lambda = -29$, sonst keine Lösung.