Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

6. Januar 2014

Höhere Mathematik I.1

Aufgabenkomplex 5: Inverse Matrix, Determinanten, Analytische Geometrie

Letzter Abgabetermin: 27. Januar 2014
(in Übung oder Briefkasten bei Zimmer Rh. Str. 39/712)
Bitte die Arbeiten deutlich mit „Höhere Mathematik I.1, Aufgabenkomplex 5“ kennzeichnen und die Übungsgruppe angeben, in der die Rückgabe erfolgen soll!
Alle Aufgaben sind ohne elektronische Hilfsmittel zu lösen!

1. Berechnen Sie, indem Sie nach der zweiten Spalte entwickeln: $\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 5 & -4 \end{vmatrix}$!

2. a) Invertieren Sie die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 9 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 12 & 5 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus!

   b) Lösen Sie mit Hilfe der inversen Matrix die Gleichungssyteme
   $$\begin{aligned} x_1+2x_2+\ \ 3x_3+4x_4&=0 \\ 3x_1+\ \ x_2+\ \ 9x_3+2x_4&=5 \\ 2x_1+4x_2+\ \ \ \ x_3+3x_4&=0 \\ 4x_1+5x_2+12x_3+5x_4&=8 \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x_1+2x_2+\ \ 3x_3+4x_4&=\ \ 7 \\ 2x_1+4x_2+\ \ \ \ x_3+3x_4&=\ \ 9 \\ 3x_1+\ \ x_2+\ \ 9x_3+2x_4&=\ \ 1 \\ 4x_1+5x_2+12x_3+5x_4&=11 \end{aligned} \quad !$$

3. In dem Gleichungssystem $x_1=y_1,\ x_3=y_2,\ x_2=y_3,\ ax_3+bx_4=y_4$ seien y_i $(i=1,2,3,4)$ gegeben und x_i $(i=1,2,3,4)$ gesucht.

   a) Notieren Sie das Gleichungssystem in Matrixschreibweise, bestimmen Sie mit dem Gaußschen Algorithmus die Inverse der Koeffizientenmatrix und notieren Sie mit Hilfe dieser Inversen die Lösung des Gleichungssystems!

   b) Für welche Werte der Parameter a und b existiert die Inverse nicht? Geben Sie die ggf. dennoch existierende Lösung des Gleichungssystems an!

4. Bestimmen Sie den Spiegelpunkt des Koordinatenursprungs an der Ebene $3x+2y-4z=58$!

5. Bestimmen den Mittelpunkt und Radius des Kreises, der bei Rotation des Punktes $(-1,-2,10)$ um die Gerade $\vec{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ erzeugt wird, sowie die Gleichung der Ebene, in der dieser Kreis liegt!

6. Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -30 \end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$, $\vec{u}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix}$.

   a) Ermitteln Sie die zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonale Richtung!

   b) Projizieren Sie die Vektoren $\vec{b}-\vec{a}$ und $\vec{c}-\vec{a}$ auf den bei a) ermittelten Vektor!

   c) Ermitteln Sie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{b}+t\vec{v}$ sowie den Abstand zwischen den Geraden $\vec{x}=\vec{a}+t\vec{u}$ und $\vec{x}=\vec{c}+t\vec{v}$!

   d) Welches der bei c) betrachteten Geradenpaare liegt in einer Ebene? Geben Sie deren Gleichung in parameterfreier Form an!