Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Toni Kowalewitz

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Lösung zur Klausurvorbereitung III

Hauptachsentransformation

1. (9 Punkte - WS 07/08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 + 4x_2 - 6 = 0.$$
Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $u_1^2 + 2u_2^2 - 8 = 0 \Rightarrow$ Ellipse.
2. (9 Punkte - SS 08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 + 16x_1x_2 - 11x_2^2 + 34x_1 - 28x_2 + 4 = 0.$$
Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $\frac{u_1^2}{3} - u_2^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ Hyperbel.
3. (8 Punkte - WS 08/09) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 - 70x_2 = 200.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $\sqrt{10}u_1 + u_2^2 - 30 = 0 \Rightarrow$ Parabel.
4. (8 Punkte - WS 09/10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2 = 2.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $-u_1^2 + 3u_2^2 - \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow$ Hyperbel.
5. (8 Punkte - SS 10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung
$$x_1^2 - 16x_1x_2 - 11x_2^2 - 16x_1 - 22x_2 + 4 = 0.$$
Welche Kurve in der $x_1 - x_2 -$ Ebene wird hierdurch beschrieben?
Lösung: $\frac{u_1^2}{3} - u_2^2 + 1 = 0 \Rightarrow$ Hyperbel

Gemischte Analysisaufgaben

1. (5 Punkte - WS 08/09) Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+2}} x^k$.
   a) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe und geben Sie den Konvergenzbereich an.
   b) Berechnen Sie unter Nutzung einer geeigneten geometrischen Reihe den Wert der Potenzreihe (innerhalb des Konvergenzbereichs).

   Lösung:
   a) Konvergenzradius: $R = 2$, Konvergenzbereich:$\{x \in \mathbb{R} : |x| < 2\}$.
   b) $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{2^{k+2}} x^k = \dfrac{x^2}{16 - 8x}$, für $-2 < x < 2$.

2. (8 Punkte - WS 08/09) Durch
$$y = \ln x, \quad x > 0$$
ist eine ebene Kurve K gegeben.
   a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ von K.
   b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(1;0)$ der Kurve den Krümmungsradius sowie die Gleichungen von Tangente und Normale.
   c) Für welches x ist der Krümmungsradius minimal?

   Lösung:
   a) $\kappa(x) = -x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$.
   b) Krümmungsradius: $R = \sqrt{8}$, Tangentengleichung: $y_T = x - 1$,
   Normalengleichung: $y_N = 1 - x$.
   c) $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. (4 Punkte - WS 08/09) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, ob die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x \geq 0, \\ -|x|^{1/3}, & x < 0, \end{cases}$$
in $x = 0$ differenzierbar ist.
Lösung: f ist an $x_0 = 0$ differenzierbar, wenn $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert.
Bei uns gilt $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\frac{1}{3}}-0^{\frac{1}{3}}}{|x|-0} = \lim_{x\to 0} |x|^{-\frac{2}{3}}$.
Dieser Grenzwert existiert nicht, denn $|x|^{-\frac{2}{3}} \xrightarrow{x\to 0} \infty$.
Somit ist f in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

4. (3 Punkte - WS 09/10) Finden Sie das Taylor-Polynom dritten Grades für $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi$.
Lösung: $T_3(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3$.

5. (6 Punkte - WS 09/10) Ein Punkt bewegt sich für $t \geq 0$ nach folgendem Zeitgesetz in der $x - y -$ Ebene:
$$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t\sin t.$$
   a) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit $t > 0$.
   b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(0;\pi/2)$ der Bahnkurve die Gleichungen von Tangente und Normale.

   Lösung:
   a) Betrag der Geschwindigkeit: $|v(t)| = \sqrt{1+t^2}$.
   b) Gleichung von Tangente: $y_T = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$, Gleichung von Normale: $y_N = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}$.

6. (4 Punkte - WS 09/10) Gibt es eine reelle Konstante r, sodass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cosh x - 1}{5x^2}, & x \neq 0, \\ r, & x = 0, \end{cases}$$
stetig auf $\mathbb{R}$ ist?

Lösung: Klar ist, dass f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Wegen L'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - 1}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - 1}{5x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}}{10x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}}{10} = \frac{1}{10},$$

und somit ist f für $r = \frac{1}{10}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

7. (8 Punkte - SS 10) Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ist eine Ellipse K in der $x - y -$ Ebene gegeben.

a) Geben Sie eine parametrische Darstellung $(x(t), y(t)), t \in I$ der Kurve K an.

b) Bestimmen Sie im Punkt $P(-2; y_0)$ der Kurve ($y_0 > 0$) die Gleichungen von Tangente und Normale.

Lösung:

a) $(x(t), y(t))^\top = (4\cos t, 2\sin t)^\top, \quad t \in I = [0, 2\pi)$.

b) Tangentengleichung: $y_T = \frac{1}{6}\sqrt{3}x + \frac{4}{3}\sqrt{3}$, Normalengleichung: $y_N = -2\sqrt{3}x - 3\sqrt{3}$.

8. (8 Punkte - SS 10) Begründen Sie, warum die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \le 0, \\ 1 + cx, & x > 0, \end{cases}$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
Untersuchen Sie den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bei $x = 0$ auf Konvergenz für $\Delta x \to 0$.
Für welches c ist f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$?
Lösung: Klar ist, dass f stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Für $x = 0$ gilt $(x+1)^2 = 1 = 1 + cx$, und somit ist f stetig auf ganz $\mathbb{R}$.
Klar ist wieder, dass f stetig differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.

Für $x = 0$ untersuche linksseitigen und rechtsseitigen Differenzenquotienten:
$\lim_{h \searrow 0} f'(0 + h) = c, \quad \lim_{h \searrow 0} f'(0 - h) = 2,$
also ist f stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ genau dann wenn $c = 2$ ist.