

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Klausurvorbereitung III
Hauptachsentransformation, Analysisaufgaben

Hauptachsentransformation

1. (9 Punkte - WS 07/08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$9x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 32x_1 + 4x_2 - 6 = 0.$$

Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?

2. (9 Punkte - SS 08) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 + 16x_1x_2 - 11x_2^2 + 34x_1 - 28x_2 + 4 = 0.$$

Welche Kurve zweiter Ordnung wird hierdurch beschrieben?

3. (8 Punkte - WS 08/09) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 + 10x_1 - 70x_2 = 200.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2$ - Ebene wird hierdurch beschrieben?

4. (8 Punkte - WS 09/10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - x_2 = 2.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2$ - Ebene wird hierdurch beschrieben?

5. (8 Punkte - SS 10) Bestimmen Sie die Normalform der quadratischen Gleichung

$$x_1^2 - 16x_1x_2 - 11x_2^2 - 16x_1 - 22x_2 + 4 = 0.$$

Welche Kurve in der $x_1 - x_2$ - Ebene wird hierdurch beschrieben?

Gemischte Analysisaufgaben

1. (5 Punkte - WS 08/09) Gegeben ist die Potenzreihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k+2}} x^k$.

- Berechnen Sie den Konvergenzradius der Reihe und geben Sie den Konvergenzbereich an.
- Berechnen Sie unter Nutzung einer geeigneten geometrischen Reihe den Wert der Potenzreihe (innerhalb des Konvergenzbereichs).

2. (8 Punkte - WS 08/09) Durch

$$y = \ln x, \quad x > 0$$

ist eine ebene Kurve K gegeben.

- Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(x)$ von K .
- Bestimmen Sie im Punkt $P_0(1;0)$ der Kurve den Krümmungsradius sowie die Gleichungen von Tangente und Normale.
- Für welches x ist der Krümmungsradius minimal?

3. (4 Punkte - WS 08/09) Untersuchen Sie mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, ob die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x \geq 0, \\ -|x|^{1/3}, & x < 0, \end{cases}$$

in $x = 0$ differenzierbar ist.

4. (3 Punkte - WS 09/10) Finden Sie das Taylor-Polynom dritten Grades für $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = \pi$.
5. (6 Punkte - WS 09/10) Ein Punkt bewegt sich für $t \geq 0$ nach folgendem Zeitgesetz in der $x - y -$ Ebene:

$$x(t) = t \cos t, \quad y(t) = t \sin t.$$

- a) Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit des Punktes zu einer beliebigen Zeit $t > 0$.
- b) Bestimmen Sie im Punkt $P_0(0; \pi/2)$ der Bahnkurve die Gleichungen von Tangente und Normale.
6. (4 Punkte - WS 09/10) Gibt es eine reelle Konstante r , sodass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cosh x - 1}{5x^2}, & x \neq 0, \\ r, & x = 0, \end{cases}$$

stetig auf \mathbb{R} ist?

7. (8 Punkte - SS 10) Durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

ist eine Ellipse K in der $x - y -$ Ebene gegeben.

- a) Geben Sie eine parametrische Darstellung $(x(t), y(t)), t \in I$ der Kurve K an.
- b) Bestimmen Sie im Punkt $P(-2; y_0)$ der Kurve ($y_0 > 0$) die Gleichungen von Tangente und Normale.
8. (8 Punkte - SS 10) Begründen Sie, warum die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2, & x \leq 0, \\ 1+cx, & x > 0, \end{cases}$$

für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ stetig auf \mathbb{R} ist.

Untersuchen Sie den Differenzenquotienten $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ bei $x = 0$ auf Konvergenz für $\Delta x \rightarrow 0$. Für welches c ist f stetig differenzierbar auf \mathbb{R} ?