Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Toni Kowalewitz

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Lösung zur Klausurvorbereitung II

Komplexe Zahlen

Die folgenden Aufgaben waren nicht Bestandteil einer Prüfung Höhere Mathematik I für Maschinenbauer.

1. Man bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

   a) $z^3 = -1$, b) $z^4 + 1 = 0$, c) $z^3 + 2 = 2i$, d) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$,

   e) $z^2 = -3 - 4i$, f) $z^2 + 4iz + 5 = 0$.

   Lösung:

   a) $z_1 = -1, \quad z_{2,3} = \dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{1}{2}\sqrt{3},$ b) $z_{1,2,3,4} = \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{2} \pm i\dfrac{1}{2}\sqrt{2},$

   c) $z_1 = 1 + i, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{19\pi}{12}},$ d) $z_k = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{3\pi}{6}\right)}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$

   e) $z_{1,2} = \pm(1 - 2i),$ f) $z_1 = i, \quad z_2 = -5i.$

2. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

   a) $z^5 = 1$, b) $z^3 - i = 0$, c) $z^6 = 64$,

   d) $\bar{z}^3 = -8$, e) $z^2 + 4iz = 5$, f) $\bar{z} = z^3$.

   Lösung:

   a) $z_k = e^{ik\frac{2\pi}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4,$ b) $z_1 = -i, \quad z_{2,3} = \dfrac{1}{2}i \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{3},$

   c) $z_k = 2e^{ik\frac{\pi}{3}}, \quad k = 0, \ldots, 5,$ d) $z_k = 2e^{i\left(k\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}, \quad k = 0, 1, 2,$

   e) $z_1 = -1 - 2i, \quad z_2 = 1 - 2i,$ f) $z_{1,2} = \pm 1, \quad z_{3,4} = \pm i, \quad z_5 = 0.$

Matrizen, Determinanten, Eigenwerte

1. (5 Punkte - WS 07/08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & \beta & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β.
Ist F invertierbar?
Ist die transponierte Matrix $F^\top$ invertierbar?

Lösung: $\det F_\beta = -42 - 20\beta - 2\beta^2$
F ist invertierbar $\Leftrightarrow \det F_\beta \neq 0 \Leftrightarrow \beta \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -3\} \Leftrightarrow F^\top$ ist invertierbar.

2. (8 Punkte - WS 07/08) Die Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

hat nur ganzzahlige Eigenwerte.
Bestimmen Sie diese und die zugehörigen Eigenunterräume.
Geben Sie für jeden Eigenunterraum eine Orthonormalbasis an.

Lösung: Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \lambda_{2/3} = 6$.
$$E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_6 = \left\{ \begin{pmatrix} -s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$
ONB für E_0: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$, ONB für E_6: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

3. (9 Punkte - SS 08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \beta & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β.
Ermitteln Sie den Rang von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β.

Lösung: $\det F_\beta = -8\beta^2 + 56\beta - 48$.
Für $\det F_\beta \neq 0$ gilt $\operatorname{rang} F_\beta = 4$, d.h. $\operatorname{rang} F_\beta = 4$, falls $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 6\}$.
Für $\beta \in \{1, 6\}$ gilt $\operatorname{rang} F_1 = 3$, $\operatorname{rang} F_6 = 3$.

4. (9 Punkte - SS 08)

   a) Die symmetrische Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   hat nur ganzzahlige Eigenwerte.
   Bestimmen Sie diese und die zugehörigen normierten Eigenvektoren.

   b) Nennen Sie zwei Eigenschaften von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen.
   Überprüfen Sie diese Eigenschaften am Beispiel der Matrix G.

Lösung: a) Eigenwerte: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$.

Zugehörige Eigenvektoren: $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Eigenschaften von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen:

- da alle EW reell sind, kann man stets die zugehörigen EV reell wählen,
- alle EV zu verschieden EW sind orthogonal.

5. (10 Punkte - WS 08/09)

   a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

   und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.

   b) Begründen Sie kurz folgenden Sachverhalt:
   Wenn $\lambda = 0$ Eigenwert einer Matrix B ist, dann ist B nicht invertierbar.

Lösung: a) Charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \lambda^2(8 - \lambda)$,
Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = 0, \lambda_3 = 8$,
Basis in E_0: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Basis in E_8: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
b) 0 ist EW von $B \Leftrightarrow \det\,(B - 0I) = 0 \Leftrightarrow \det B = 0 \Leftrightarrow B$ ist nicht invertierbar.

6. (9 Punkte - WS 09/10)

   a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \neq 0$ und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.
   Wie lauten Eigenwerte und Eigenunterräume für $a = 0$?

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenwertgleichung, dass folgende Behauptung wahr ist: Wenn eine Matrix B den Eigenwert μ hat mit zugehörigem Eigenvektor y, dann ist μ^2 Eigenwert der Matrix B^2 mit dem zugehörigen Eigenvektor y.

Lösung: a) Charakteristisches Polynom: $p_A(\lambda) = \lambda^2(a - \lambda)$,
Eigenwerte: $\lambda_{1/2} = 0, \lambda_3 = a$,
Für $a \neq 0$ gilt:
Basis in E_0: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, Basis in E_a: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Für $a = 0$ folgt, dass $\lambda = 0$ einziger Eigenwert ist, und $E_0 = \left\{ s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Zu zeigen: μ ist EW von B zum EV $y \Leftrightarrow \mu^2$ ist EW von B^2 zum EV y
Beweis: Sei μ EW von B zum EV $y \iff Bx = \mu x \iff B(Bx) = B(\mu x) \iff B^2x = \mu(Bx) \iff B^2x = \mu(\mu x) \iff B^2x = \mu^2 x \iff \mu^2$ ist EW von B^2 zum EV y. □

7. (8 Punkte - SS 10)
Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert dessen algebraische und geometrische Vielfachheit sowie den zugehörigen Eigenunterraum.

Lösung: Eigenwerte: $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2/3} = -3$,
Algebraische Vielfachheit: $\alpha(0) = 1, \quad \alpha(-3) = 2$,
$$E_0 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R} \right\}, \quad E_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R} \right\},$$
Geometrische Vielfachheit: $\gamma(0) = 1 = \dim E_0, \quad \gamma(-3) = 2 = \dim E_{-3}$.