

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Klausurvorbereitung II
Komplexe Zahlen, Matrizen, Determinanten, Eigenwerte

Komplexe Zahlen

Die folgenden Aufgaben waren nicht Bestandteil einer Prüfung Höhere Mathematik I für Maschinenbauer. Die Lösungen werden nach der Besprechung des Aufgabenzettels bekannt gegeben.

1. Man bestimme alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} a) z^3 = -1, & b) z^4 + 1 = 0, & c) z^3 + 2 = 2i, & d) z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i, \\ e) z^2 = -3 - 4i, & f) z^2 + 4iz + 5 = 0. & & \end{array}$$

2. Man bestimme alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} a) z^5 = 1, & b) z^3 - i = 0, & c) z^6 = 64, \\ d)^3 = -8, & e) z^2 + 4iz = 5, & f) \bar{z} = z^3. \end{array}$$

Matrizen, Determinanten, Eigenwerte

1. (5 Punkte - WS 07/08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & \beta & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β .

Ist F invertierbar?

Ist die transponierte Matrix F^T invertierbar?

2. (8 Punkte - WS 07/08) Die Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

hat nur ganzzahlige Eigenwerte.

Bestimmen Sie diese und die zugehörigen Eigenunterräume.

Geben Sie für jeden Eigenunterraum eine Orthonormalbasis an.

3. (9 Punkte - SS 08) Gegeben ist die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} \beta & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & \beta & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β .
Ermitteln Sie den Rang von F in Abhängigkeit vom reellen Parameter β .

4. (9 Punkte - SS 08)

a) Die symmetrische Matrix

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

hat nur ganzzahlige Eigenwerte.

Bestimmen Sie diese und die zugehörigen normierten Eigenvektoren.

b) Nennen Sie zwei Eigenschaften von Eigenvektoren symmetrischer Matrizen.
Überprüfen Sie diese Eigenschaften am Beispiel der Matrix G .

5. (10 Punkte - WS 08/09)

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.

b) Begründen Sie kurz folgenden Sachverhalt:

Wenn $\lambda = 0$ Eigenwert einer Matrix B ist, dann ist B nicht invertierbar.

6. (9 Punkte - WS 09/10)

a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

in Abhängigkeit vom reellen Parameter $a \neq 0$ und geben Sie zu jedem Eigenunterraum eine Basis an.

Wie lauten Eigenwerte und Eigenunterräume für $a = 0$?

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenwertgleichung, dass folgende Behauptung wahr ist:

Wenn eine Matrix B den Eigenwert μ hat mit zugehörigem Eigenvektor y , dann ist μ^2 Eigenwert der Matrix B^2 mit dem zugehörigen Eigenvektor y .

7. (8 Punkte - SS 10)

Berechnen Sie alle Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert dessen algebraische und geometrische Vielfachheit sowie den zugehörigen Eigenunterraum.