Technische Universität Chemnitz Prof. Dr. Bernd Hofmann
Fakultät für Mathematik Toni Kowalewitz

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Lösung zur Klausurvorbereitung I

Komplexe Zahlen

1. (5 Punkte - WS 07/08) Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung
$$z^3 - a\left(1+\sqrt{3}i\right)^2 = 0.$$
Lösung: $z_k = \sqrt[3]{4a}e^{i\left(\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$

2. (5 Punkte - SS 08) Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von allen komplexen Lösungen z der Gleichung
$$z^3 = (1+i)^6.$$
Lösung: $z_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\frac{2\pi}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2,$
$\text{Re } z_0 = 0, \text{Im } z_0 = 2, \quad \text{Re } z_1 = -\sqrt{3}, \text{Im } z_1 = -1, \quad \text{Re } z_2 = \sqrt{3}, \text{Im } z_2 = -1.$

3. (6 Punkte - WS 08/09) Lösen Sie mittels quadratischer Ergänzung folgende quadratische Gleichung in $\mathbb{C}$:
$$z^2 + (3-i)z + 2 - 2i = 0.$$
Lösung: $z_1 = -2, \quad z_2 = i - 1.$

4. (6 Punkte - WS 09/10) Finden Sie jene Lösung w der Gleichung
$$z^2 - 4z = 2i - 4,$$
deren Imaginärteil negativ ist.
Geben Sie Real- und Imaginärteil von w^{2010} an.
Lösung: $z_1 = 3 + i, \quad z_2 = 1 - i \Rightarrow w = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right),$
$w^{2010} = \left(\sqrt{2}\right)^{2010}\left(\cos\left(2010\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(2010\frac{7\pi}{8}\right)\right) \Rightarrow \text{Re } w^{2010} = 0, \text{Im } w^{2010} = -2^{1005}.$

5. (4 Punkte - SS 10) Finden Sie den Real- und Imaginärteil von
$$w = \frac{z-1}{z+i}$$
für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.
Lösung: $\text{Re } w = \dfrac{(x-1)x + y(1+y)}{x^2 + (1+y)^2}, \quad \text{Im } w = \dfrac{1+y-x}{x^2+(1+y)^2}.$

Ungleichungen

1. (4 Punkte - WS 07/08) Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 5$ gilt die folgende Ungleichung?
$$\frac{x^2+6}{|5-x|} > 2$$
Lösung: $\mathcal{L} = \left(-\infty, -1-\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}-1, \infty\right).$

2. (5 Punkte - SS 08) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$\left|\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right| > |x-2|$$

Lösung: $\mathcal{L} = \left(-\infty, -\frac{11}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

3. (5 Punkte - WS 08/09) Es sei $a > 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$|x+a| - |x-a| < x$$

Lösung: $\mathcal{L} = (-2a, 0) \cup (2a, \infty)$.

4. (5 Punkte - WS 09/10) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$3|x-2| - 4|x| \leq 5$$

Lösung: $\mathcal{L} = \mathbb{R} \setminus \left(-1, \frac{1}{7}\right)$.

5. (5 Punkte - SS 10) Für welche $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ gilt die Ungleichung

$$\frac{4|x|-5}{|x-1|} \leq 2 \quad ?$$

Lösung: $\mathcal{L} = \left[-\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right] \setminus \{1\}$.

Lineare Gleichungssysteme

1. (7 Punkte - WS 07/08) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 6 &= 0, & -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 + \alpha &= 0, & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Lösung: Für $\alpha \neq -10$ ist das System unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{\alpha \neq -10} = \emptyset$.
Für $\alpha = -10$ folgt

$$\mathcal{L}_{\alpha=-10} = \left\{ \begin{pmatrix} -s+t \\ 2+2s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. (5 Punkte - SS 08) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1, & 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6-26s+17t \\ -1+7s-5t \\ s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. (5 Punkte - WS 08/09) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}(i = 0, 1, 2, 3)$ eines reellen Polynoms
$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$
aus folgenden vier Bedingungen, die zu einem linearen Gleichungssystem führen:
$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = 0, \quad f'(2) = 1.$$
Wieviele solcher Polynome gibt es?
Lösung: Da das lineare Gleichungssystem, welches durch obige Bedingungen bestimmt ist, vollen Rang hat, ist es eindeutig lösbar.
Somit existiert genau eine Lösung: $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

4. (6 Punkte - WS 09/10) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $c \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, & x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 6, & 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= c. \end{aligned}$$
Lösung: Für $c \neq -4$ ist das System unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{c\neq -4} = \emptyset$.
Für $c = -4$ folgt
$$\mathcal{L}_{c=-4} = \left\{ \begin{pmatrix} 15 - 11s \\ 1 + s \\ -5 + 5s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

5. (6 Punkte - SS 10) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $b \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 + 2x_2 + bx_3 &= 4. \end{aligned}$$
Lösung: Für $b = 0$ ist das System unlösbar, d.h. $\mathcal{L}_{b=0} = \emptyset$.
Für $b \neq 0$ folgt
$$\mathcal{L}_b = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{b}\right) \\ \frac{1}{3}\left(4 + \frac{2}{b}\right) \\ \frac{2}{b} \end{pmatrix} \right\}.$$