

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Klausurvorbereitung I
Komplexe Zahlen, Ungleichungen, Lineare Gleichungssysteme

Komplexe Zahlen

1. (5 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Gleichung

$$z^3 - a(1 + \sqrt{3}i)^2 = 0.$$

2. (5 Punkte) Berechnen Sie jeweils Real- und Imaginärteil von allen komplexen Lösungen z der Gleichung

$$z^3 = (1 + i)^6.$$

3. (6 Punkte) Lösen Sie mittels quadratischer Ergänzung folgende quadratische Gleichung in \mathbb{C} :

$$z^2 + (3 - i)z + 2 - 2i = 0.$$

4. (6 Punkte) Finden Sie jene Lösung w der Gleichung

$$z^2 - 4z = 2i - 4,$$

deren Imaginärteil negativ ist.

Geben Sie Real- und Imaginärteil von w^{2010} an.

5. (4 Punkte) Finden Sie den Real- und Imaginärteil von

$$w = \frac{z - 1}{z + i}$$

für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

Ungleichungen

1. (4 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 5$ gilt die folgende Ungleichung?

$$\frac{x^2 + 6}{|5 - x|} > 2$$

2. (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$\left| \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right| > |x - 2|$$

3. (5 Punkte) Es sei $a > 0$. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$|x + a| - |x - a| < x$$

4. (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die folgende Ungleichung?

$$3|x - 2| - 4|x| \leq 5$$

5. (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}, x \neq 1$ gilt die Ungleichung

$$\frac{4|x| - 5}{|x - 1|} \leq 2 \quad ?$$

Lineare Gleichungssysteme

1. (7 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 5x_4 + 6 &= 0, & -3x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 + x_4 + \alpha &= 0, & 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - 6 &= 0. \end{aligned}$$

2. (5 Punkte) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5, & x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1, & 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12. \end{aligned}$$

3. (5 Punkte) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R} (i = 0, 1, 2, 3)$ eines reellen Polynoms

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

aus folgenden vier Bedingungen, die zu einem linearen Gleichungssystem führen:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = -1, \quad f(2) = 0, \quad f'(2) = 1.$$

Wieviele solcher Polynome gibt es?

4. (6 Punkte) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $c \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 3, & x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 13, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 - 4x_4 &= 6, & 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= c. \end{aligned}$$

5. (6 Punkte) Untersuchen Sie das lineare Gleichungssystem für $b \in \mathbb{R}$ auf Lösbarkeit, und finden Sie gegebenenfalls alle Lösungen:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 + 2x_2 + bx_3 &= 4. \end{aligned}$$