

Übung Elementarmathematik im WS 2013/14

Lösung zum 3. Übungsblatt

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

1. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass keine negativen Exponenten mehr auftreten:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left(\frac{s^{-4}x^2}{t^{-6}y^{-4}} \right)^2 : \left(\frac{x^{-1}y^{-2}}{t^4s^{-3}} \right)^3 = \frac{x^7t^{24}y^{14}}{s^{17}}, \\ \text{b)} \quad & \left[\left(\frac{1}{5^{-3}} \right)^{-2} \right]^{-3} = 5^{18}, \\ \text{c)} \quad & \left[\left(\frac{x^{-3}y^{-2}}{z^{-3}} \right)^4 \right]^{-2} = \frac{x^{24}y^{16}}{z^{24}}. \end{aligned}$$

2. Vereinfachen Sie:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x+y}{z} \sqrt[3]{\frac{z^4 - z^3x}{x^2 + 2xy + y^2}} = \sqrt[3]{(x+y)(z-x)}, & \text{b)} \quad \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^4-b^4}} \cdot \sqrt{a^2+b^2} &= \frac{1}{\sqrt{a-b}}, \\ \text{c)} \quad & \frac{\sqrt[3]{a^4b} \cdot \sqrt[3]{a^2b^7} \cdot \sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b^5}} = a^2 \sqrt[3]{b^4}, & \text{d)} \quad \sqrt[3]{a^2 \sqrt{a^4} \sqrt[4]{a^3}} &= a^{\frac{23}{24}}, \\ \text{e)} \quad & \sqrt[4]{\sqrt[3]{x}} \cdot \sqrt{\sqrt[6]{x^2}} \cdot \sqrt[12]{x^7} = x^{\frac{5}{6}}, & \text{f)} \quad \sqrt{\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}}} &= \sqrt[8]{\left(\frac{a}{b}\right)^3}. \end{aligned}$$

3. Formen Sie die folgenden Ausdrücke derart um, dass der Nenner rational wird.

$$\text{a)} \quad \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3}}{3\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{15} + 1}{22}, \quad \text{b)} \quad \frac{4\sqrt{5} - \sqrt{30}}{\sqrt{12} + 5\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{10} - 9\sqrt{15}}{19},$$

4. Formen Sie die Logarithmenausdrücke um bzw. bestimmen Sie x .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \log_k \sqrt[m]{k} = \frac{1}{m}, & \text{b)} \quad \log_y y^{-n} &= -n, & \text{c)} \quad \ln e^{-3} &= -3, \\ \text{d)} \quad & \log_x \frac{1}{u} = -1 \Rightarrow x = u, & \text{e)} \quad \log_4 x = \frac{1}{2} &\Rightarrow x = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Fassen Sie mit Hilfe der Logarithmengesetze zusammen.

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_a u + \log_a v - \log_a w &= \log_a \left(\frac{uv}{w} \right), \\ \text{b) } x \ln u + y \ln v &= \ln(u^x v^y), \\ \text{c) } \frac{1}{3} \log_k a - \frac{1}{5} \log_k b + \frac{2}{3} \log_k c &= \log_k \left(\frac{\sqrt[3]{ac^2}}{\sqrt[5]{b}} \right). \end{aligned}$$

Wurzel-, Exponential- und Logarithmengleichungen

1. Lösen Sie folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{5x-4} &= 1 + \sqrt{3x+1} && \Rightarrow x \in \{8\}, \\ \text{b) } \sqrt{x+2} - \sqrt{x-2} &= \frac{x+1}{\sqrt{x+2}} && \Rightarrow x \in \{\sqrt{5}\}, \\ \text{c) } \sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} &= 0 && \Rightarrow x \in \left\{ -3 + \frac{2}{3}\sqrt{3} \right\}, \\ \text{d) } 4\sqrt[3]{6x-1} + 5 &= 0 && \Rightarrow x \in \left\{ -\frac{61}{384} \right\}, \\ \text{e) } e^{x^2-2\sqrt{x^2}} - e^{-1} &= 0 && \Rightarrow x \in \{-1, 1\}, \\ \text{f) } 10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 &= 0 && \Rightarrow x \in \{0, 2\}, \\ \text{g) } \ln(x^2 + 10x - 4) - \ln x - 1 &= 0 && \Rightarrow x \in \left\{ -5 + \frac{e}{2} + \sqrt{29 - 5e + \frac{e^2}{4}} \right\}, \\ \text{h) } \frac{\ln(35 - x^3)}{\ln(5 - x)} &= 3 && \Rightarrow x \in \{2, 3\}. \end{aligned}$$

2. Lösen Sie die folgende Formel nach t auf:

$$\text{a) } Kq^t - \frac{q^t - 1}{q - 1} = 0 \Rightarrow t = -\log_q(1 + K(1 - q)),$$

dabei Lösbarkeit für konkrete Parameterwahl beachten.

3. Lösen Sie die Gleichungen:

$$\text{a) } x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x \in \{-2, -1, 1, 2\}, \quad \text{b) } 10x^4 - x^2 - 21 = 0 \Rightarrow x \in \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}.$$