

Übungsblatt 4

Differentialrechnung

1. Bilden Sie die Ableitungen folgender Ausdrücke dort, wo sie existieren:

a) $f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$), b) $f(x) = x^2 e^x$, c) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$,

d) $f(x) = a^x$ ($a > 0$), e) $f(x) = \sin(x^2 - 1)$, f) $f(x) = \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$,

g) $f(x) = x^3 (x^2 - 1)^3$, h) $f(x) = e^{x^3} - (e^x)^3$, i) $f(x) = (2x)^{\sin x}$.

Lösung:

a) $f'(x) = a x^{a-1}$, b) $f'(x) = e^x (2x + x^2)$, c) $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, d) $f'(x) = a^x \ln a$,

e) $f'(x) = 2x \cos(x^2 - 1)$, f) $f'(x) = \frac{2}{\sin(2x) - 1}$, g) $f'(x) = 3x^2 (x^2 - 1)^2 (3x^2 - 1)$,

h) $f'(x) = 3x^2 e^{x^3} - 3e^{3x}$, i) $f'(x) = (2x)^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(2x) + \frac{\sin x}{x} \right)$.

2. Bei einer zweistufigen reversiblen adiabatischen Gaskompression vom Anfangsdruck $p_1 > 0$ bis zum Enddruck $p_2 > p_1$ ist die zu verrichtende Arbeit gegeben durch

$$W(p) = n R T \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 2 + \left(\frac{p_2}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right],$$

wobei $n, R, T > 0$ und $\kappa > 1$ sind. Bestimmen Sie p derart, dass $W(p)$ möglichst klein wird.

Lösung:

$$W'(p) = nRT \left[p_1^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} p^{-\frac{1}{\kappa}} - p_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} p^{\frac{1-2\kappa}{\kappa}} \right] \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{p_1 p_2}$$

$$W''(\sqrt{p_1 p_2}) = \underbrace{-2nRT}_{<0} \underbrace{\left(\frac{1-\kappa}{\kappa} \right)}_{<0 \ (\kappa>1)} \underbrace{p_1^{\frac{1-3\kappa}{2\kappa}}}_{>0} \underbrace{p_2^{-\frac{1+\kappa}{2\kappa}}}_{>0} > 0$$

D. h. der Zwischendruck, der die zu verrichtende Arbeit minimiert, ist das geometrische Mittel von p_1 und p_2 .

Integralrechnung

3. Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int x^2 dx, & \text{b) } \int (4x-9)^{10} dx, & \text{c) } \int e^{-3x} dx, & \text{d) } \int \sin \frac{x}{2} dx, \\ \text{e) } \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}, & \text{f) } \int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx, & \text{g) } \int x^2 \sin x dx, & \text{h) } \int \frac{x^2-2x-1}{x-1} dx. \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{1}{3}x^3 + C, & \text{b) } \frac{1}{44}(4x-9)^{11} + C, & \text{c) } -\frac{1}{3}e^{-3x} + C, & \text{d) } -2 \cos \frac{x}{2} + C, \\ \text{e) } \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C, & \text{f) } \frac{1}{2} \arctan \frac{e^x}{2} + C, & \text{g) } -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C, \\ \text{h) } \frac{1}{2}x^2 - x - 2 \ln|x-1| + C. \end{array}$$

4. Bestimmen Sie folgende bestimmte Integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 (3-x^2)^2 dx, \quad \text{b) } \int_0^1 x(3-x^2)^5 dx, \quad \text{c) } \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Lösung:

$$\text{a) } \frac{36}{5}, \quad \text{b) } \frac{665}{12}, \quad \text{c) } 1 - \frac{\pi}{4}.$$