Übungsblatt 3

Komplexe Zahlen

1. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in der Polarform (trigonometrischen Form) dar:
   a) $\dfrac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}$, b) $\dfrac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{i}-1}$, c) $(1+\mathrm{i})^2$.

Lösung:
a) $\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}$, b) $\cos\frac{3}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{2}\pi$, c) $2(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2})$.

2. Berechnen Sie $2^{-1000}\left(\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1+3\mathrm{i}} - \dfrac{3+2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}\right)^{2004}$.

Lösung:
-4.

3. Es sei $z = \dfrac{1}{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$. Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist z^n reell?

Lösung:
Für alle $n \in \mathbb{N}$, die durch 3 teilbar sind (ganzzahlige Vielfache von 3).

4. Es sei $z = a + b\,\mathrm{i} = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \in \mathbb{C}$, wobei $a, b \in \mathbb{R}, r > 0, \varphi \in [0, 2\pi)$. Bestimmen Sie den Realteil, Imaginärteil, Betrag und das Argument folgender komplexer Zahlen:
   a) $\overline{z}$, b) $\overline{z}^{\,-1}$, c) z^2, d) $\mathrm{i}\,z$, e) $z\,\overline{z}$.

Lösung:

a) $\mathrm{Re}(\overline{z}) = a$, $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -b$, $|\overline{z}| = r$, $\arg(\overline{z}) = \begin{cases} 2\pi - \varphi & \text{für } \varphi \neq 0 \\ \varphi & \text{für } \varphi = 0 \end{cases}$

b) $\mathrm{Re}(\overline{z}^{\,-1}) = \frac{a}{r^2}$, $\mathrm{Im}(\overline{z}^{\,-1}) = -\frac{b}{r^2}$, $|\overline{z}^{\,-1}| = \frac{1}{r}$, $\arg(\overline{z}^{\,-1}) = \varphi$

c) $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$, $\mathrm{Im}(z^2) = 2ab$, $|\overline{z^2}| = r^2$, $\arg(z^2) = \begin{cases} 2\varphi & \text{für } \varphi \in [0, \pi) \\ 2\varphi - 2\pi & \text{für } \varphi \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$

d) $\mathrm{Re}(\mathrm{i}\,z) = -b$, $\mathrm{Im}(\mathrm{i}\,z) = a$, $|\mathrm{i}\,z| = r$, $\arg(\mathrm{i}\,z) = \begin{cases} \varphi + \frac{\pi}{2} & \text{für } \varphi \in [0\frac{3}{2}\pi) \\ \varphi - \frac{3}{2}\pi & \text{für } \varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi) \end{cases}$

e) $\mathrm{Re}(z\,\overline{z}) = r^2$, $\mathrm{Im}(z\,\overline{z}) = 0$, $|z\,\overline{z}| = r^2$, $\arg(z\,\overline{z}) = 0$

5. Geben Sie alle komplexen Lösungen folgender Gleichungen in der algebraischen Darstellung an:

   a) $z^3 = 1$, b) $z^3 = \mathrm{i}$, c) $(z - 3\mathrm{i})^6 = -64$.

Lösung:
a) $z_0 = 1, \quad z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

b) $z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \quad z_1 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\mathrm{i}, \quad z_3 = -\mathrm{i}$

c) $z_0 = \sqrt{3} + 4\mathrm{i}, \quad z_1 = 5\mathrm{i}, \quad z_2 = -\sqrt{3} + 4\mathrm{i}, \quad z_3 = -\sqrt{3} + 2\mathrm{i}, \quad z_4 = i, \quad z_5 = \sqrt{3} + 2\mathrm{i}.$

6. Drücken Sie $\cos(n\,\varphi)$ und $\sin(n\,\varphi)$, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, mittels Potenzen von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ aus.

Lösung:

$$\cos(n\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \cos^{n-2k}\varphi\, \sin^{2k}\varphi,$$

$$\sin(n\,\varphi) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \cos^{n-2k-1}\varphi\, \sin^{2k+1}\varphi.$$