Übungsblatt 2

Ungleichungen

1. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Ungleichungen?

   a) $-3x + 2 < 4x - 12$, b) $-4\,(3 - x) \geq 6x$, c) $\dfrac{3x-1}{2x+2} > 1$, d) $\dfrac{x-1}{x+2} \leq 4$.

   Lösung:
   a) $x \in (2, \infty)$, b) $x \in (-\infty, -6]$, c) $x \in \mathbb{R}\backslash[-1, -3]$, d) $x \in \mathbb{R}\backslash(-3, -2]$.

2. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{(x-a)\,(x-b)}{x-c} > 0$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > b > c$ sind?

   Lösung:
   $x \in (c, b) \cup (a, \infty)$.

3. Lösen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen $x^2 < m$ und $x^2 > m$, wobei $m \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

   Lösung:

$$x^2 < m \quad \Leftrightarrow \quad x \in \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } m \leq 0 \\ (-\sqrt{m}, \sqrt{m}), & \text{falls } m > 0 \end{cases}$$

$$x^2 > m \quad \Leftrightarrow \quad x \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } m < 0 \\ \mathbb{R}\backslash[-\sqrt{m}, \sqrt{m}], & \text{falls } m \geq 0. \end{cases}$$

4. Bestimmen Sie unter Verwendung von Aufgabe 3 die Lösungsmenge der Ungleichungen $x^2 + p\,x + q > 0$ und $x^2 + p\,x + q < 0$ für beliebige $p, q \in \mathbb{R}$.

   Lösung:
   Es sei $D := \frac{p^2}{4} - q$. Dann gilt:

$$x^2 < m \quad \Leftrightarrow \quad x \in \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } D \leq 0 \\ \left(\frac{p}{2} - \sqrt{D}, \frac{p}{2} + \sqrt{D}\right), & \text{falls } D > 0 \end{cases}$$

$$x^2 > m \quad \Leftrightarrow \quad x \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } D < 0 \\ \mathbb{R}\backslash\left[\frac{p}{2} - \sqrt{D}, \frac{p}{2} + \sqrt{D}\right], & \text{falls } D \geq 0. \end{cases}$$

Beträge

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Gleichungen:

   a) $|x-2| = 10$, b) $|2x+1| = |x+1| + 2$, c) $|x-1|\,|x-2| = 2$.

Lösung:
a) $\{-8, 12\}$, b) $\{-2, 2\}$, c) $\{0, 3\}$.

6. Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}$ folgender Ungleichungen:

   a) $|x+2| + |x-2| \leq 12$, b) $\big||x-1| + x\big| + |x| \leq 3$, c) $3 < |x+2| \leq 5$.

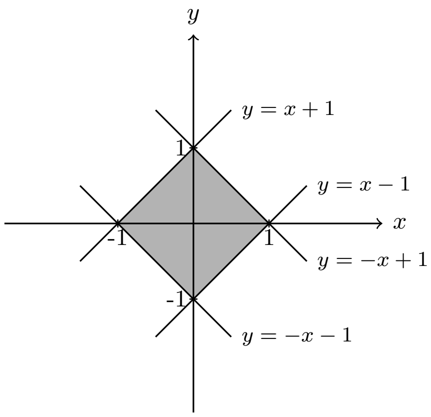
Lösung:
a) $[-6, 6]$, b) $[-2, \frac{4}{3}]$, c) $[-7, -5) \cup (1, 3]$.

7. Stellen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^2$ folgender Ungleichungen graphisch dar:

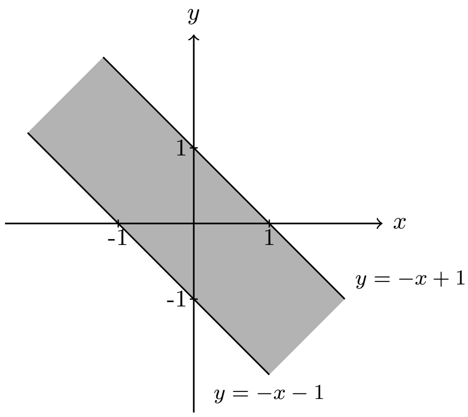
   a) $|x| + |y| \leq 1$, b) $|x+y| \leq 1$, c) $1 \leq |x-y| \leq 2$, d) $|x-y|^2 + |x+y|^2 \leq 1$.

Lösung:

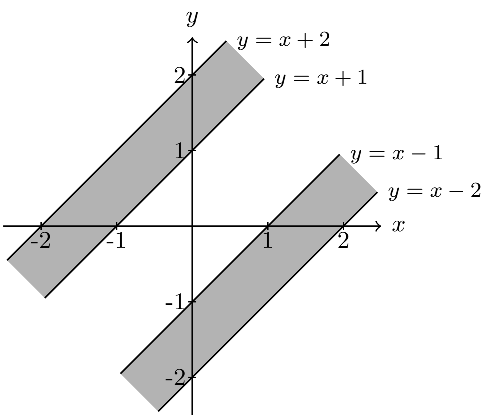
a)



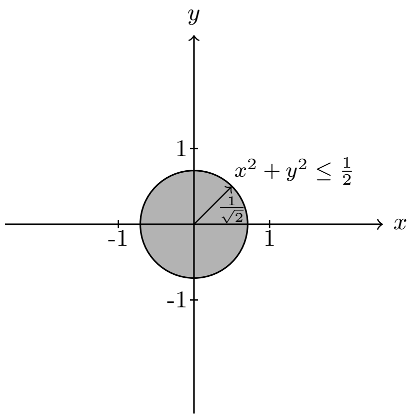
b)



c)



d)



Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

8. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

a) $\left(\dfrac{b^{-5}\,x^2}{a^{-6}\,y^{-4}}\right)\left(\dfrac{a^4\,b^{-3}}{x^{-1}\,y^{-2}}\right)$, b) $\left[\left(\dfrac{1}{a^{-3}}\right)^{-2}\right]^{-3}$, c) $\left[\left(\dfrac{x^{-3}\,y^{-2}}{z^{-3}}\right)^4\right]^{-2}$,

d) $\dfrac{x+y}{z}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{z^4-z^3\,x}{x^2+2x\,y+y^2}}$, e) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a\,\sqrt[4]{a^3}}}$, f) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}\,\sqrt{\sqrt[6]{x}}\,\sqrt[12]{x^7}$,

g) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4\,b}\,\sqrt[3]{a^2\,b^7}\,\sqrt[3]{a^2\,b}}{\sqrt[3]{a^2\,b^5}}$, h) $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a^4-b^4}}\,\sqrt{a^2+b^2}$, i) $\sqrt{\dfrac{a}{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{a}{b}}}}$.

Lösung:

a) $\dfrac{a^{10}\,x^3\,y^6}{b^8}$, b) a^{18}, c) $\dfrac{x^{24}\,y^{16}}{z^{24}}$, d) $\sqrt[3]{(x+y)\,(z-x)}$, e) $a^{\frac{23}{24}}$, f) $x^{\frac{3}{4}}$,

g) $a^2\,b^{\frac{4}{3}}$, h) $\frac{1}{\sqrt{a-b}}$, i) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{8}}$.

9. Vereinfachen Sie folgende Logarithmenausdrücke bzw. bestimmen Sie $x \in \mathbb{R}$:

a) $\log_k \sqrt[k]{m}$, b) $\log_y y^{-n}$, c) $\ln e^{-3}$, d) $\log_x \frac{1}{u} = -1$, e) $\log_4 x = \frac{1}{2}$.

Lösung:

a) $\frac{1}{k}\,\log_k m$, b) $-n$, c) -3, d) $x = u$, e) $x = 2$.

10. Fassen Sie zusammen:

a) $\log_a u - \log_a v + \log_a w$, b) $x\,\ln u + y\,\ln v$, c) $\frac{1}{3}\,\log_k a - \frac{1}{5}\,\log_k b + \frac{2}{3}\,\log_k c$.

Lösung:

a) $\log_a\left(\frac{u\,w}{v}\right)$, b) $\ln\left(u^x\,v^y\right)$, c) $\log_k\left(\frac{\sqrt[3]{a\,c^2}}{\sqrt[5]{b}}\right)$.

Wurzel-, Exponential-, Logarithmengleichungen

11. Lösen Sie folgende biquadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, b) $10x^4 - x^2 = 21$.

Lösung:

a) $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$, b) $x \in \left\{-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

12. Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten folgende Gleichungen bzw. Ungleichungen?

a) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 12$,

b) $\dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} = 5$,

c) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} + \sqrt{x+3} = 0$,

d) $4\sqrt[3]{6x-1} = -8$,

e) $\sqrt{5x-4} = 1 + \sqrt{3x+1}$,

f) $e^{x^2 - 2\sqrt{x^2}} - e^{-1} = 0$,

g) $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$,

h) $10^{2x} - 101 \cdot 10^x + 100 = 0$,

i) $3^{4x^2-7x-14} \leq 9^{x^2-3x-4}$,

j) $\dfrac{\ln(35-x^3)}{\ln(5-x)} = 3$,

k) $\lg\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\lg 16 - \sqrt{x+\frac{1}{4}}\,\lg 4$.

Lösung:
a) $x = 81$, b) $x = \frac{5}{13}$, c) $x = \frac{2}{\sqrt{3}} - 3$, d) $x = -\frac{7}{6}$, e) $x = 8$, f) $x \in \{-1, 1\}$,

g) $x = 1$, h) $x \in \{0, 2\}$, i) $x \in [-\frac{3}{2}, 2]$, j) $x \in \{2, 3\}$, k) $x = 2$.

13. Lösen Sie folgende Formel nach n auf:

$$K\,q^n - \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Lösung:
$$n = -\log_q\left(1 - K(q-1)\right) = -\frac{\ln\left(1 - K(q-1)\right)}{\ln q}.$$

Partialbruchzerlegung

14. Führen Sie die Partialbruchzerlegung aus:

a) $\dfrac{2x+1}{(x+2)\,(x-5)}$, b) $\dfrac{x}{(x+1)\,(x+2)\,(x+3)}$, c) $\dfrac{x^{10}}{x^2+x-2}$, d) $\dfrac{1}{x^4-1}$.

Lösung:

a) $\dfrac{3/7}{x+2} + \dfrac{11/7}{x-5}$,

b) $\dfrac{-1/2}{x+1} + \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{-3/2}{x+3}$,

c) $x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \dfrac{-1024/3}{x+2} + \dfrac{1/3}{x-1}$,

d) $\dfrac{1/4}{x-1} + \dfrac{-1/4}{x+1} + \dfrac{i/4}{x-i} + \dfrac{-i/4}{x+i}$.