

Übungsblatt 1

Umformung von Termen

1. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\text{a) } \frac{48ax}{49by} \cdot \frac{63ay}{32bx}, \quad \text{b) } \frac{4}{15}xy \cdot \frac{25x}{28y}, \quad \text{c) } \frac{45ac}{56bd} : \frac{81ab}{49bc}, \quad \text{d) } \frac{99ac}{35b} : \left(\frac{11}{14}ab\right).$$

Lösung:

$$\text{a) } \frac{27a^2}{14b^2}, \quad \text{b) } \frac{5x^2}{21}, \quad \text{c) } \frac{35c^2}{72bd}, \quad \text{d) } \frac{18c}{5b^2}.$$

2. Rationalisieren Sie die Nenner:

$$\text{a) } \frac{1}{2\sqrt{5}}, \quad \text{b) } \frac{1}{2\sqrt{7} + \sqrt{5}}, \quad \text{c) } \frac{r}{2\sqrt{x} - 3\sqrt{y}}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \frac{\sqrt{5}}{10}, \quad \text{b) } \frac{2\sqrt{7} - \sqrt{5}}{23}, \quad \text{c) } \frac{r(2\sqrt{x} + 3\sqrt{y})}{4x - 9y}.$$

3. Zerlegen Sie folgende Terme in Faktoren:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3ax - 6ay - 15bx + 30by, & \quad \text{b) } 8ax + 12bx - 10ay - 15by, \\ \text{c) } 2ax + 3bx - 2ay - 3by + 4az + 6bz, & \quad \text{d) } 18r^2 - 45rs^2 + 14rs - 35s^3. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{a) } 3(a - 5b)(x - 2y), & \quad \text{b) } (4x - 5y)(2a + 3b), \\ \text{c) } (x - y + 2z)(2a + 3b), & \quad \text{d) } (9r + 7s)(2r - 5s^2). \end{aligned}$$

4. Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{2c - 5b}{6ab - 10b^2} - \frac{5(2c - 3a)}{18a^2 - 30ab}, & \quad \text{b) } \frac{a}{a^2 - 2ab + b^2} - \frac{a}{a^2 - b^2} + \frac{1}{a + b}, \\ \text{c) } \frac{a + 1}{a^2 - a} - \frac{a - 1}{a^2 + a} + \frac{1}{a} - \frac{4}{a^2 - 1}, & \quad \text{d) } \frac{x^2 + y^2}{xy} - \frac{x^2}{xy + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + xy}. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\text{a) } \frac{c}{3ab}, \quad \text{b) } \frac{a^2 + b^2}{(a + b)(a - b)^2}, \quad \text{c) } \frac{1}{a}, \quad \text{d) } 1.$$

5. Beseitigen Sie die Doppelbrüche:

$$\text{a) } \frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{y}}{\frac{5}{x} - \frac{3}{y}}, \quad \text{b) } \frac{\frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}}, \quad \text{c) } \frac{\frac{a+1}{a-1} - 1}{\frac{a+1}{a-1} + 1}, \quad \text{d) } \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2}}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \frac{3y - 5x}{5y - 3x}, \quad \text{b) } \frac{x + y}{x - y}, \quad \text{c) } \frac{1}{a}, \quad \text{d) } \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-x^2 + 2}.$$

6. Ergänzen Sie folgende Terme quadratisch:

$$\text{a) } x^2 + 6x, \quad \text{b) } z^2 - \frac{10}{7}z, \quad \text{c) } \frac{16}{49}t^2 - \frac{16}{21}t.$$

Lösung:

$$\text{a) } (x + 3)^2 - 9, \quad \text{b) } \left(z - \frac{5}{7}\right)^2 - \frac{25}{49}, \quad \text{c) } \left(\frac{4}{7}t - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}.$$

7. Führen Sie eine Polynomdivision durch:

$$\text{a) } (x^3 - 2xy^2 + y^3) : (x - y), \quad \text{b) } (9a^3 - 6a^2b - 2ab^2 + 4b^3) : (3a + 2b),$$

$$\text{c) } (9x^3 + 2y^3 - 7xy^2) : (3x - 2y), \quad \text{d) } (25x^4 + a^2x^2 + 25a^4) : (5x^2 + 7ax + 5a^2).$$

Lösung:

$$\text{a) } x^2 + xy - y^2, \quad \text{b) } 3a^2 - 4ab + 2b^2, \quad \text{c) } 3x^2 + 2xy - y^2, \quad \text{d) } 5x^2 - 7ax + 5a^2.$$

8. Stellen Sie folgende Formeln nach jeder darin vorkommenden Variablen um:

$$\text{a) } a(1 - b^2) = c + 2ac, \quad \text{b) } \frac{1 - n}{1 + n} = \frac{r + 1}{s}, \quad \text{c) } \frac{2m + 3(m + n)}{2m + n} = \frac{1}{p + 1}.$$

Lösung:

$$\text{a) } a = \frac{c}{1 - b^2 - 2c}, \quad b = \pm \sqrt{1 - \frac{c + 2ac}{a}}, \quad c = \frac{a(1 - b^2)}{1 + 2a}$$

$$\text{b) } s = \frac{(r + 1)(1 + n)}{1 - n}, \quad r = \frac{s(1 - n)}{1 + n} - 1, \quad n = \frac{s - r - 1}{s + r + 1}$$

$$\text{c) } p = -\frac{3m + 2n}{5m + 3n}, \quad m = -\frac{n(2 + 3p)}{5p + 3}, \quad n = -\frac{m(3 + 5p)}{3p + 2}$$

9. Lösen Sie folgende Gleichungen nach $x \in \mathbb{R}$ auf und führen Sie die Probe durch:

$$\text{a) } \frac{4}{x-5} + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-7} = \frac{4}{x-4}, \quad \text{b) } \frac{x+7}{x+1} + \frac{x+9}{x+2} = \frac{4(x+8)}{2x+3},$$

$$\text{c) } a(2x-c) - ab = c(2x-a) + ab, \quad \text{d) } (a-2b)(b+x) = 6b^2 + a(2a-7b).$$

Lösung:

$$\text{a) } x = 1, \quad \text{b) } x = 5, \quad \text{c) } x = \frac{ab}{a-c}, \quad \text{d) } x = 2a - 4b.$$

Summenzeichen

10. Schreiben Sie die Summen ausführlich auf und berechnen Sie d) und e):

$$\text{a) } \sum_{j=5}^{20} b_j, \quad \text{b) } \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad \text{c) } \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{j=1}^3 b_{ij}, \quad \text{d) } \sum_{i=1}^n i, \quad \text{e) } 1 + \sum_{i=0}^n 2^i.$$

Lösung:

$$\text{a) } \sum_{j=5}^{20} b_j = b_5 + b_6 + b_7 + \dots + b_{19} + b_{20},$$

$$\text{b) } \sum_{i=1}^3 a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{j=1}^3 b_{ij} = a_1 (b_{11} + b_{12} + b_{13}) + a_2 (b_{21} + b_{22} + b_{23}) + a_3 (b_{31} + b_{32} + b_{33}),$$

$$\text{d) } \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{e) } 1 + \sum_{i=0}^n 2^i = 1 + 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1}.$$

11. Fassen Sie mit Hilfe von Summenzeichen zusammen:

$$\text{a) } a_0 b_0^2 + a_2 b_2^2 + \dots + a_{2n} b_{2n}^2, \quad \text{b) } 5x_1 x_2 + 5x_2 x_3 + \dots + 5x_n x_{n+1},$$

$$\text{c) } a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{im} x_m, \quad \text{d) } a_1^2 + a_2^4 + a_3^8 + a_4^{16} + a_5^{32}.$$

Lösung:

$$\text{a) } \sum_{i=0}^n a_{2i} b_{2i}^2, \quad \text{b) } 5 \sum_{i=1}^n x_i x_{i+1}, \quad \text{c) } \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \quad \text{d) } \sum_{i=1}^5 a_i^{2^i}$$

Chemisches Rechnen

12. Wie viel Gramm AgNO_3 sind in 175 g einer 5 M%igen AgNO_3 -Lösung enthalten?

Lösung:

$$m_{\text{AgNO}_3} = 8,75 \text{ g}$$

13. Aus einer 92 M%igen und einer 64 M%igen H_2SO_4 sollen 3,5 kg einer 72 M%igen H_2SO_4 hergestellt werden. Berechnen Sie die Massen der zu mischenden Säuren.

Lösung:

$$m_{\text{H}_2\text{SO}_4, 92 \text{ M}\%} = 1 \text{ kg}, \quad m_{\text{H}_2\text{SO}_4, 64 \text{ M}\%} = 2,5 \text{ kg}$$

14. Es werden 20 g einer 36 M%igen HCl mit 100 g H₂O gemischt. Welche Konzentration hat die Lösung?

Lösung:

$$c_{\text{HCl}} = 6 \text{ M\%}$$