Klausurvorbereitung - Teil IV

Analytische Geometrie

1. (12 Punkte) Gegeben seien die Punkte $A = (0, 0, 8)$, $B = (1, 0, 7)$, $C = (1, 1, 3)$ und $D = (0, 2, 0)$.
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte in einer Ebene liegen und bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form!
   b) Geben Sie die Geradengleichung des Lotes vom Koordinatenursprung auf diese Ebene an und bestimmen Sie den Lotfußpunkt!
   c) Welchen Abstand hat die Ebene vom Koordinatenursprung?
   d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks $ABCD$!
   e) Bestimmen Sie den Winkel beim Punkt A in diesem Viereck!

Lösung:

a) $x + 4y + z = 8$

b) Lotgerade: $g : \vec{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$, Ortsvektor des Lotfußpunktes: $\frac{4}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Abstand $d = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

d) Fläche $A = \frac{9\sqrt{2}}{2}$

e) Winkel $\varphi \approx 46{,}7°$

2. (11 Punkte) Die Punkte $A(3, 0, -1)$, $B(3, 3, 0)$ und $C(7, 3, 1)$ liegen in der Ebene E.
   a) Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene E und die Gleichung der Ebene in parameterfreier Form!
   b) Zerlegen Sie den Vektor $\overrightarrow{AC}$ in seine Komponenten in Richtung des Vektors $\overrightarrow{AB}$ und die dazu orthogonale Komponente!
   c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC sowohl mithilfe des Ergebnisses von a) als auch mithilfe des Ergebnisses von b)!
   d) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt $(13, 20, -20)$ auf die Ebene E und den Abstand dieses Punktes von der Ebene!

Lösung:

a) Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

Ebenengleichung: $3x + 4y - 12z = 21$

b) $\overrightarrow{AC}_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{11}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}^{\perp}_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 40 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

c) mit a): Fläche $= \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{13}{2}$

mit b): Fläche $= \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \right\| \left\| \overrightarrow{AC}^{\perp}_{\overrightarrow{AB}} \right\| = \frac{13}{2}$

d) Ortsvektor des Lotfußpunktes: $\begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

Abstand $= 26$

3. (6 Punkte) Ermitteln Sie den Abstand der Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; !$$

Lösung:
Abstand $= 18$

4. (5 Punkte) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebenen $x + 2y + 3z = 4 \cdot 10^{120}$, $-x+4y+2z = 10^{122}$ und $8x-2y+az = b+2\cdot 10^{121}$ in Abhängigkeit von den Parametern a und b! (Die Gleichung der ggf. existierenden Schnittmenge der 3 Ebenen muss nicht angegeben werden.)

Lösung:

- $a \neq 9$: Ebenen haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt
- $a = 9, b = -3 \cdot 10^{122}$: Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgeraden
- $a = 9, b \neq -3 \cdot 10^{122}$: kein Schnittpunkt aller 3 Ebenen, aber eine Schnittgerade zwischen je zwei Ebenen, die parallel zueinander sind

Folgen, Reihen und Finanzmathematik

5. (6 Punkte) Berechnen Sie

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^{100} n}{n^2+5}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2+1)^5\,(4n^3+2)^3}{(2n+3)^8\,(n+4)^{11}}$, c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{8^n}{10^n}$, d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{10^n}{8^n}$!

Lösung:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{10^{100} n}{n^2+5} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n^2+1)^5\,(4n^3+2)^3}{(2n+3)^8\,(n+4)^{11}} = 8$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{8^n}{10^n} = 5$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{10^n}{8^n} = \infty$

6. (5 Punkte) Beim Auswaschen eines Feststoffes aus einer Lösung der Masse u wird beim k-ten Abguss ($k = 1, 2, 3, \ldots$) Feststoff der Masse $u/100^k$ gewonnen. Welche Masse des Feststoffs hat man nach n Abgüssen insgesamt gewonnen? Was ergibt sich für $n \to \infty$?

Lösung:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u}{100^k} = u\,\frac{100^n - 1}{99 \cdot 100^n} \quad \xrightarrow{n\to\infty} \quad \frac{u}{99}$$

7. (5 Punkte) Eine Bank zahlt einem Kunden 8 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 1000 Währungseinheiten und fordert das so gewährte Darlehen am Ende des 8. Jahres in einer Summe einschließlich Zinsen zurück. Welchen Betrag fordert sie vom Kunden, wenn das Darlehen (sei es aus Wucher oder wegen einer sehr hohen Inflationsrate) mit 100 % pro Jahr zu verzinsen ist?

Lösung:
510 000