

## Klausurvorbereitung - Teil IV

### Analytische Geometrie in der Ebene und im Raum

1. (12 Punkte) Gegeben seien die Punkte  $A = (0, 0, 8)$ ,  $B = (1, 0, 7)$ ,  $C = (1, 1, 3)$  und  $D = (0, 2, 0)$ .
  - a) Zeigen Sie, dass die Punkte in einer Ebene liegen und bestimmen Sie die Gleichung dieser Ebene in parameterfreier Form!
  - b) Geben Sie die Geradengleichung des Lotes vom Koordinatenursprung auf diese Ebene an und bestimmen Sie den Lotfußpunkt!
  - c) Welchen Abstand hat die Ebene vom Koordinatenursprung?
  - d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Vierecks  $ABCD$ !
  - e) Bestimmen Sie den Winkel beim Punkt  $A$  in diesem Viereck!
  
2. (11 Punkte) Die Punkte  $A(3, 0, -1)$ ,  $B(3, 3, 0)$  und  $C(7, 3, 1)$  liegen in der Ebene  $E$ .
  - a) Bestimmen Sie den Normalenvektor der Ebene  $E$  und die Gleichung der Ebene in parameterfreier Form!
  - b) Zerlegen Sie den Vektor  $\overrightarrow{AC}$  in seine Komponenten in Richtung des Vektors  $\overrightarrow{AB}$  und die dazu orthogonale Komponente!
  - c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$  sowohl mithilfe des Ergebnisses von a) als auch mithilfe des Ergebnisses von b)!
  - d) Bestimmen Sie den Fußpunkt des Lotes vom Punkt  $(13, 20, -20)$  auf die Ebene  $E$  und den Abstand dieses Punktes von der Ebene!
  
3. (6 Punkte) Ermitteln Sie den Abstand der Gerade

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} !$$

4. (5 Punkte) Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Ebenen  $x + 2y + 3z = 4 \cdot 10^{120}$ ,  $-x + 4y + 2z = 10^{122}$  und  $8x - 2y + az = b + 2 \cdot 10^{121}$  in Abhängigkeit von den Parametern  $a$  und  $b$ ! (Die Gleichung der ggf. existierenden Schnittmenge der 3 Ebenen muss nicht angegeben werden.)

## Folgen, Reihen und Finanzmathematik

5. (6 Punkte) Berechnen Sie

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{100}n}{n^2 + 5}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n^2 + 1)^5 (4n^3 + 2)^3}{(2n + 3)^8 (n + 4)^{11}}, \quad \text{c) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{10^n}, \quad \text{d) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^n}{8^n} \quad !$$

6. (5 Punkte) Beim Auswaschen eines Feststoffes aus einer Lösung der Masse  $u$  wird beim  $k$ -ten Abguss ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) Feststoff der Masse  $u/100^k$  gewonnen. Welche Masse des Feststoffs hat man nach  $n$  Abgüssen insgesamt gewonnen? Was ergibt sich für  $n \rightarrow \infty$ ?

7. (5 Punkte) Eine Bank zahlt einem Kunden 8 Jahre lang jeweils zu Jahresbeginn 1000 Währungseinheiten und fordert das so gewährte Darlehen am Ende des 8. Jahres in einer Summe einschließlich Zinsen zurück. Welchen Betrag fordert sie vom Kunden, wenn das Darlehen (sei es aus Wucher oder wegen einer sehr hohen Inflationsrate) mit 100% pro Jahr zu verzinsen ist?