Klausurvorbereitung - Teil III

Matrizen und Gleichungssysteme

1. (10 Punkte) Gegeben sei das Gleichungssysteme

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & \lambda y & + & z & = & 2 \\ \lambda x & + & y & + & 2z & = & 1. \end{array}$$

   a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems!
   b) Für welche λ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
   c) Für welche λ ist das Gleichungssystem mehrdeutig lösbar?
   d) Für welche λ ist das Gleichungssystem unlösbar?
   e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung im Fall c)!
   f) Wie können die Ergebnisse von b) - d) geometrisch interpretiert werden?

Lösung:

a) $\det(A) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2$

b) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$

c) $\lambda = 2$

d) $\lambda = 1$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

f) zu b): Ebenen haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt
zu c): Ebenen haben eine gemeinsame Schnittgerade
zu d): Kein Schnittpunkt aller 3 Ebenen, aber eine Schnittgerade zwischen je zwei Ebenen, die parallel zueinander sind

2. (9 Punkte) An 100 Gewinner eines Gewinnspieles soll je ein Preis versandt werden. Dafür sollen die Preise A, B, C und D beschafft werden. Diese kosten 10 € pro Preis A, 20 € pro Preis B, 50 € pro Preis C und 100 € pro Preis D. An Versandkosten fallen pro Preis A und B jeweils 3 €, pro Preis C 6 € und pro Preis D 9 € an. Insgesamt stehen 2 180 € für den Einkauf der Preise und 360 € für den Versand zur Verfügung, die unbedingt vollständig verbraucht werden sollen. Wie viele der einzelnen Preise müssen beschafft

werden? Ermitteln Sie alle möglichen Lösungen! Wie viele verschiedene Lösungen gibt es?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 42+2t \\ 38-t \\ 20-2t \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \{0,1,2,\ldots,10\}$$

Es gibt 11 verschiedene Lösungen.

3. (4 Punkte) Seien A, B, C, D, F und X reelle quadratische Matrizen gleicher Ordnung, X sei symmetrisch. Lösen Sie die Gleichung $F(XA + X + B + X^T + (CX)^T) = D$ nach X auf. Seien die dabei erforderlichen Invertierungen möglich.

Lösung:

$X = (F^{-1}D - B)\,(A + 2I + C^\top)^{-1}$

4. (9 Punkte) Für die Herstellung von Endprodukten E_1, E_2, E_3 und E_4 werden Baugruppen B_1, B_2 und B_3 nach folgendem Schema benötigt:

	E_1	E_2	E_3	E_4
B_1	1	2	2	5
B_2	2	2	3	2
B_3	3	3	0	3

Es stehen 50 Baugruppen B_1, 50 Baugruppen B_2 und 30 Baugruppen B_3 zur Verfügung. Wie viele der einzelnen Endprodukte sind daraus zu fertigen, wenn alle vorhandenen Baugruppen verwendet werden sollen?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+3t \\ 20-4t \\ 10 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \{4,5\}$$

5. (6 Punkte) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \quad !$$

Wie groß kann der Rang der Matrix maximal werden? Welche Bedingungen müssen die Parameter a und b erfüllen, damit die Matrix diesen maximalen Rang hat?

Lösung:

$\det(A) = 3ab - 18a$

$\text{Rang}(A) \leq 5$

$\text{Rang}(A) = 5 \iff a \neq 0 \wedge b \neq 6$

6. (9 Punkte) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\det(A)$ und A^{-1} in Abhängigkeit vom Parameter a !

b) Lösen Sie unter Verwendung des Ergebnisses von a) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 7 \\ 3x & + & y & + & 5z & = & 12 \end{array} \; !$$

Lösung:

a) $\det(A) = a - 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{a-4} \begin{pmatrix} a-3 & 1 & -1 \\ 9-2a & a-3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$