

Klausurvorbereitung - Teil II

Komplexe Zahlen

1. (7 Punkte) Bestimmen Sie die komplexe Zahl z , welche die Gleichung

$$\frac{(4-5i)z - 12 + 3i}{i} = 1 - 6i$$

löst! Geben Sie das Ergebnis in algebraischer, Polar- (trigonometrischer) und Exponentialdarstellung an!

Lösung:

algebraische Darstellung: $z = 2 + 2i$

Polardarstellung: $2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$

Exponentialdarstellung: $2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

2. (6 Punkte) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge aller komplexen Zahlen z , die der Bedingung $2 \leq |z - 3 + 3i| \leq 3\sqrt{2}$ genügen! Enthält die Menge reelle Zahlen, wenn ja, welche?

Lösung:

Lösung sind alle Kreise mit Mittelpunkt $(3, -3)$ und Radius $2 \leq r \leq 3\sqrt{2}$.

Menge reeller Zahlen: $[0, 6]$

3. (6 Punkte) Berechnen Sie $1,5^{222222} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}i} \right)^{444444}$!

Lösung:

-1

4. (6 Punkte) Ermitteln Sie alle vierten Wurzeln aus der Zahl -4096 in algebraischer und in trigonometrischer Darstellung und stellen Sie diese grafisch dar!

Lösung:

$$z_0 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

$$z_1 = 8 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$$

$$z_2 = 8 \left(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi \right) = -4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

$$z_3 = 8 \left(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi \right) = 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}i$$

5. (6 Punkte) Sei $z = re^{i\varphi}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (in Realteil und Imaginärteil) und skizzieren Sie diese:

a) $|z - 1| = 1$, b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Lösung:

a) $\mathcal{L} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} : (a - 1)^2 + b^2 = 1\}$ b) $\mathcal{L} = \{z = a + bi \in \mathbb{C} : a = b, a \geq 0\}$

6. (6 Punkte) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) \quad \text{und} \quad z_2 = 2 + 2i.$$

Berechnen Sie das Argument von $\frac{z_1}{z_2}$ und den Betrag von $z_1 z_2$.

Lösung:

$$\arg \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \frac{17}{12} \pi$$

$$|z_1 z_2| = 8\sqrt{2}$$

7. (7 Punkte) Bestimmen Sie die algebraische Darstellung von $\frac{(2 + i\sqrt{12})^{66}}{2^{128}(1 - i)^6}$, benutzen Sie dazu die trigonometrische Darstellung der Zahlen im Zähler und Nenner!

Lösung:

$$-2i$$

8. (6 Punkte) Berechnen Sie $\frac{12^{333\,335}}{(\sqrt{3} + 3i)^{666\,666}}$!

Lösung:

$$144$$

9. (7 Punkte) Sei a ein beliebig reeller Parameter. Bestimmen Sie die komplexe Zahl z , welche die Gleichung $(2 + i)(iz + a) + ai = -1 - 2a + 2i$ erfüllt!

Lösung:

$$1 + 2ai$$

10. (7 Punkte) Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (2 + 4i)z + 5 + (4 - 8\sqrt{3})i = 0$ und zeichnen Sie die Lösung in die komplexe Zahlenebene ein.

Lösung:

$$z_1 = 3 + 2(1 + \sqrt{3})i, \quad z_2 = -1 + 2(1 - \sqrt{3})i$$