

Klausurvorbereitung - Teil II

Komplexe Zahlen

1. (7 Punkte) Bestimmen Sie die komplexe Zahl z , welche die Gleichung

$$\frac{(4-5i)z - 12 + 3i}{i} = 1 - 6i$$

löst! Geben Sie das Ergebnis in algebraischer, Polar- (trigonometrischer) und Exponentialdarstellung an!

2. (6 Punkte) Skizzieren Sie in der komplexen Ebene die Menge aller komplexen Zahlen z , die der Bedingung $2 \leq |z - 3 + 3i| \leq 3\sqrt{2}$ genügen! Enthält die Menge reelle Zahlen, wenn ja, welche?

3. (6 Punkte) Berechnen Sie $1,5^{222222} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}i}\right)^{444444}$!

4. (6 Punkte) Ermitteln Sie alle vierten Wurzeln aus der Zahl -4096 in algebraischer und in trigonometrischer Darstellung und stellen Sie diese grafisch dar!

5. (6 Punkte) Sei $z = re^{i\varphi}$. Bestimmen Sie die Lösungsmenge (in Realteil und Imaginärteil) und skizzieren Sie diese:

$$\text{a) } |z - 1| = 1, \quad \text{b) } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

6. (6 Punkte) Gegeben seien die komplexen Zahlen

$$z_1 = 4 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right) \quad \text{und} \quad z_2 = 2 + 2i.$$

Berechnen Sie das Argument von $\frac{z_1}{z_2}$ und den Betrag von $z_1 z_2$.

7. (7 Punkte) Bestimmen Sie die algebraische Darstellung von $\frac{(2 + i\sqrt{12})^{66}}{2^{128}(1 - i)^6}$, benutzen Sie dazu die trigonometrische Darstellung der Zahlen im Zähler und Nenner!

8. (6 Punkte) Berechnen Sie $\frac{12^{333335}}{(\sqrt{3} + 3i)^{666666}}$!

9. (7 Punkte) Sei a ein beliebig reeller Parameter. Bestimmen Sie die komplexe Zahl z , welche die Gleichung $(2 + i)(iz + a) + ai = -1 - 2a + 2i$ erfüllt!

10. (7 Punkte) Lösen Sie die Gleichung $z^2 - (2 + 4i)z + 5 + (4 - 8\sqrt{3})i = 0$ und zeichnen Sie die Lösung in die komplexe Zahlenebene ein.