Übung 1

1. Wiederholen Sie die folgenden Begriffe und geben sie jeweils Beispiele
   (a) Vektorraum
   (b) Vektorraumhomomorphismus mit Spezialfällen
   (c) Basis
   (d) Dualraum
   (e) Duale Basis
   (f) Koordinatenabbildung
   (g) Koordinatensystem

2. Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq n$ und $F : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ bilde jedes Polynom auf seine Ableitung ab.
   (a) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung dieser Abbildung bzgl. einer möglichst einfachen Basis von $\mathcal{P}_n$-
   (b) Bestimmen Sie die zu F duale Abbildung F^*.

3. Gegeben seien die Basen

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad U_1' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   im $\mathbb{R}^3$ und $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $U_2' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit der Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basen U_1, U_2.
   (a) Was ist die Matrixdarstellung von φ bezüglich der Standardbasen?
   (b) Und bezüglich U_1', U_2'?
   (c) Berechnen Sie Kern und Bild von φ und geben Sie eine Basis von $\mathbb{R}^3/\ker\varphi$ an!

4. Beweisen Sie Beobachtung 6.20 aus der Vorlesung!

5. Zerlegen Sie die folgende Matrix in Elementarmatizen und bestimmen Sie ihre Inverse und ihre Determinante:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

6. Berechnen Sie folgende Determinanten für reelle Parameter! Wann sind die Determinanten 0? Lassen sich die gefundenen Formeln in Ihrer vereinfachten Form verallgemeinern (ggf. und wie?) ?

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\alpha)\cos(\beta) & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & a & b \\ a^2 & b^2 & 2a^2 & 2b^2 \\ a^3 & b^3 & 3a^3 & 3b^3 \end{pmatrix}$

Hausaufgabe 1

Abgabe: Dienstag, 30.04.2013

1. Beweisen Sie:

   Zu gegebenem Körper $(K, +, \cdot)$ und $a, b, c, d, a', b', c', d' \in K$ gibt es genau dann genau ein Polynom p vom Grad drei, welches $p(a) = a'$, $p(b) = b'$, $p(c) = c'$ und $p(d) = d'$ erfüllt, wenn keine zwei der Körperelemente a, b, c und d gleich sind.

2. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -7 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und

   (a) $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

   (b) $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $B_1 = \left(1, x, \frac{x(x-1)}{2}, \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right)$, der Basis $B_2 = \left(x^3 . x^3 - 1, x^3 - x, x^3 - x^2\right)$, sowie die Abbildung φ, welche jedem der Polynome in $\mathcal{P}_3$ seine Ableitung zuordnet. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung zu φ bezüglich der Basen B_1 (für den Definitionsbereich) und B_2 (für den Wertevorrat)!

4. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Eins und $A = (a_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{falls } j+1 = i \\ \xi & \text{falls } i = j \neq n \\ a_{n-1} + \xi & \text{falls } i = j = n \\ a_{i-1} & \text{falls } j = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

   Bestimmen Sie $\det(A)$ und beweisen Sie Ihr Ergebnis!

   Hinweis: Schreiben Sie sich A für kleines n in der üblichen Matrixform hin und erinnern Sie sich an ein entsprechendes Beispiel aus der Vorlesung!

Übung 2

7. Berechnen sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren folgender Matrizen:

   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & -\frac{4}{3} & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

   (d) $(a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{falls } j+1=i \\ 0 & \text{falls } i=j\neq n \\ a_{n-1} & \text{falls } i=j=n \\ a_{i-1} & \text{falls } j=n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

   für gegebenen reelle Parametern a_i

   (e) $(a_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ mit $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{falls } j+1=i \\ \xi & \text{falls } i=j\neq n \\ a_{n-1}+\xi & \text{falls } i=j=n \\ a_{i-1} & \text{falls } j=n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

   für gegebenen reelle Parametern ξ und a_i

8. Die Fibonacci-Zahlen genügen der Rekursion $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

   (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung φ, die $\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ abbildet bezüglich der kanonischen Basis in Definitionsbereich und Wertevorrat!

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A!

   (c) Die Eigenvektoren von A bilden eine Basis B des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$! bezüglich dieser Basis!

   (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich B in Definitionsbereich und Wertevorrat!

   (e) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}$ für allgemeines n bezüglich B!

   (f) Ermitteln Sie durch Rücktransformation auf die kanonische Basis die explizite Darstellung der Fibonacci-Folge f_n!

9. Ein reelles Polynom $P \in \mathbb{P}_3$ höchstens dritten Grades wird durch Integration nach der Variablen gleich eine Menge von Polynomen.

   (a) Welche ?

   (b) Wie ergibt sich dieser Bildraum der durch Integration beschriebenen Abbildung aus der Menge $\mathbb{P}_4$ der reellen Polynome vierten Grades?

   (Es kann hilfreich sein, die Umkehrabbildung zu betrachten)

Hausaufgabe 2

Abgabe: Dienstag, 14.05.2013

5. Berechnen sie die alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren folgender Matrizen:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

6. Wir betrachten eine Zahlenfolge a_n, die der Rekursion $a_{n+3} = a_{n+1} - 2(a_{n+2} - a_n)$ genügt.

   (a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A der linearen Abbildung φ, die $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix}$ abbildet bezüglich der kanonischen Basis in Definitionsbereich und Wertevorrat!

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A!

   (c) Die Eigenvektoren von A bilden eine Basis B des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$! bezüglich dieser Basis!

   (d) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ bezüglich B in Definitionsbereich und Wertevorrat!

   (e) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$ für allgemeines n bezüglich B!

   (f) Ermitteln Sie durch Rücktransformation auf die kanonische Basis die explizite Darstellung der Folge a_n!

7. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}^n$$

   Denken Sie komplex!

Übung 3

10. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ können als ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden und die komplexe Multiplikation mit $z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ als eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$M_z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, w \mapsto m_z(w) = zw.$$

Bestimmen Sie eine Darstellungsmatrix A bezüglich der Basis $(1, i)$, $\det M_z$, Eigenwerte und das Minimalpolynom m_{M_z}. Deuten Sie A geometrisch (Polarkoordinaten). Geben Sie eine möglichst einfache Darstellung von A^n an.

11. Sei $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ der Flip-Operator, d.h. $(x_1, \ldots, x_n)^T \stackrel{A}{\mapsto} (x_n, \ldots, x_1)^T$. Geben Sie eine Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis an. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Minimalpolynom, Eigenwerte und Eigenvektoren. Ist A diagonalisierbar?

12. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben. Ferner gebe es ein $N \geq 2$ mit $F^N = F$. Beschreiben Sie, wie das Minimalpolynom $m_F(x)$ aussehen kann,

    (a) wenn $K = \mathbb{C}$,

    (b) wenn $K = \mathbb{R}$.

    Was kann man in beiden Fällen zur Diagonalisierbarkeit sagen?

Hausaufgabe 3

Abgabe: Dienstag, 28.05.2013

8. Geben Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung an zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dafür an, dass für jedes $N \in \mathbb{N}$ die binomische Formel
$$(A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^{N-k} B^k$$
gilt. Natürlich *mit* Beweis. Berechnen Sie damit A_λ^N wobei $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben ist durch
$$A_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

9. Sei $\mathcal{P}_n$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich n und $A : \mathcal{P}_n \longrightarrow \mathcal{P}_n$, $f \mapsto Af = f'$ der Ableitungsoperator. Geben Sie das Minimalpolynom $m_A(\xi)$ von A an. Geben Sie für ein beliebiges $f \in \mathcal{P}_n$ vom Grade $k \leq n$ den Raum $[f]_A$ an. Ist $\mathcal{P}_n$ A-zyklisch?

10. Wir betrachten den Ring $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ aller Polynome in der Unbestimmten x mit reellen Koeffizienten (ersetzen Sie von mir aus $\mathbb{R}$ durch Ihren Lieblingskörper). Ferner sei I eine Untergruppe von $(\mathbb{R}[x], +)$ mit der Eigenschaft:
$$\forall g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x] : \quad h(x) \in I \Rightarrow g(x)h(x) \in I$$
Zeigen Sie: es gibt ein normiertes Polynom $m(x) \in I$ mit der Eigenschaft
$$\forall h(x) \in I \ \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] : \quad h(x) = q(x)m(x).$$
Entscheiden Sie ob $m(x)$ eindeutig bestimmt ist (mit Beweis).

Übung 4

13. Vollziehen Sie Satz 8.27 und 8.29 der Vorlesung nach am Beispiel der Matrix A und das "Abspalten" eines maximalen zyklischen Unterraums anhand von B, wobei

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

14. Zeigen Sie: Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar, so ist $A^{-1} \in \operatorname{span}(I, A, A^2, \ldots) \subseteq \mathbb{C}^{n\times n}$, d.h. A^{-1} ist eine Linearkombination von Potenzen von A. Geben Sie die Koeffizienten einer solchen Linearkombination an.

15. Zeigen Sie: F ist genau dann diagonalisierbar, wenn das charakteristische Polynom $P_F(\xi)$ in Linearfaktoren zerfällt und das Minimalpolynom $m_F(\xi)$ nur einfache Nullstellen hat.

Hausaufgabe 4

Abgabe: Dienstag, 11.06.2013

11. Sei $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Wie lässt sich das charakteristische Polynom $p_{A^{-1}}(\xi)$ von A^{-1} durch das charakteristische Polynom $p_A(\xi)$ von A ausdrücken?

12. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}_K(V)$ gegeben. Ferner gebe es ein $N \geq 1$ mit $F^{N+1} = F$, siehe Übung 3, Aufgabe 12. Entscheiden Sie ob F diagonalisierbar ist in den beiden Fällen $K = \mathbb{C}$ und $K = \mathbb{R}$.

13. Entscheiden Sie, ob die beiden Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$,
$$A = \begin{pmatrix} a & -b & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{z} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{z} \end{pmatrix}, z = a + bi,$$
ähnlich sind und geben Sie ggf. S an, so dass $S^{-1}AS = B$.

14. Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Matrix mit reellen Einträgen und $\lambda, \overline{\lambda}$ ein Paar konjugierter komplexer Eigenwerte. Wie hängen die Haupträume $Hau(A, \lambda)$ und $Hau(A, \overline{\lambda})$ zusammen?

15. Bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform für die beiden Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
sowie jeweils eine Transformationsmatrix.

Übung 5

16. **Vefahren zur Bestimmung der Normalmatrix, einer Transformationsmatrix, und der elementaren Divisoren**

Input: Matrix (Endomorphismus) A und die irreduziblen Faktoren $p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)$ von $P_A(\xi)$.
Output: $(r_1, \ldots, r_k)$ mit $m_A(\xi) = p_1(\xi)^{r_1} \cdots p_k(\xi)^{r_k}$, die elementaren Divisoren mit ihren Vielfachheiten und folglich die allgemeine Normalmatrix, eine Basis $\mathcal{S}$ mit $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(A) =$ Normalmatrix, bzw. S mit $S^{-1}AS =$Normalmatrix.

Initialisierung: $\mathcal{S} = \emptyset$ ($\mathcal{S}$ enthält am Ende eine Basis mit $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(A) =$ Normalmatrix, bzw. die Spalten einer Transformationsmatrix)
Verfahren: Für jedes $p(\xi) \in \{p_1(\xi), \ldots, p_k(\xi)\}$ setze

$$q = \deg p(\xi)$$

und führe die folgenden Schritte (a) und (b) durch:

(a) Bestimme linear unabhängige Mengen $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall\, j \geq 1: \text{ Ker } p(A)^j = \text{span}(\mathcal{U}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{U}_j).$$

Ferner setze

$$r = \min\{j \geq 1, \mathcal{U}_j = \emptyset\} - 1.$$

Dann ist r die Vielfachheit von $p(\xi)$ in $m_A(\xi)$. Weiter definiere $D(j)$ durch

$$D(r) = \frac{|\mathcal{U}_r|}{q} \text{ und } D(j) = \frac{|\mathcal{U}_j|}{q} - D(j+1) - \ldots - D(r).$$

Falls $p(\xi) = \xi - \lambda$ (d.h. $q = 1$), dann gibt $D(j)$ die Anzahl der Jordanblöcke der Größe j zum Eigenwert λ an. Allgemein gibt $D(j)$ die Anzahl der $jq \times jq$-Blöcke $M(d)$ an, die zum Elementardivisor $d = p(\xi)^j$ gehören, vgl. Satz 8.37.

Bemerkung: Ist man also nur an der Gestalt der Normalmatrix interessiert, kann man Schritt (b) überspringen und zum nächsten Primteiler übergehen.

Das Verfahren zur bestimmung der Transformationsmatrix geben wir zunächst nur für den Fall an, dass alle $p(\xi)$ Linearfaktoren sind, also ab jetzt

$$p(\xi) = \xi - \lambda \text{ und } q = 1.$$

(b) Setze $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2 = \ldots = \mathcal{V}_r = \emptyset$.
Für $m = r, \ldots, 1$ führe folgende Schritte durch

i. Ergänze die linear unabhängige Menge $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \mathcal{V}_m$ durch eine $D(m)$-elementige Menge $\mathcal{W}_m$ zu einer Basis von Ker $(A - \lambda I)^m$, etwa durch $D(m)$ geeignete Elemente aus $\mathcal{U}_m$.

ii. Für jedes $v \in \mathcal{W}_m$:

$$\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{v, (A - \lambda I)v, \ldots, (A - \lambda I)^{m-1}v\}$$
$$\text{und für } i = 0, \ldots, m-1: \mathcal{V}_{m-i} \leftarrow \mathcal{V}_{m-i} \cup \{(A - \lambda I)^i v\}$$

Bemerkungen: *i)* In Schritt (a) ist

$$\text{Ker } p(A) \subsetneq \text{Ker } p(A)^2 \subsetneq \ldots \subsetneq \text{Ker } p(A)^{r-1} \subsetneq \text{Ker } p(A)^r = \text{Ker } p(A)^{r+1} = \ldots,$$

und $\mathcal{U}_1$ ist eine Basis von Ker $p(A)$, $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$ eine Basis von Ker $p(A)^2$ und allgemein ergänzt $\mathcal{U}_i$ die bisher gewonnene Basis von Ker $p(A)^{i-1}$, zu einer von Ker $p(A)^i$.
ii) Im ersten Durchlauf der Schleife in Schritt (b) (d.h. $m = r$) kann man direkt $\mathcal{W}_r = \mathcal{U}_r$ nehmen (eine Rechnung gespart). In späteren Durchläufen kann auch $\mathcal{W}_m = \emptyset$ vorkommen (nämlich, wenn $D(m) = 0$ ist).
iii) In der Schleife in Schritt (b) wird insbesondere $\mathcal{W}_m$ zu $\mathcal{V}_m$ zugefügt, so dass nach den r Schleifendurchläufen gilt

$$\forall\, j \geq 1: \text{ Ker } p(A)^j = \text{span}(\mathcal{V}_1) \oplus \ldots \oplus \text{span}(\mathcal{V}_j).$$

Für $v \in \mathcal{W}_m$ nennt man $\{v, (A - \lambda I)v, \ldots, (A - \lambda I)^{m-1}v\}$ *Jordan-Kette* der Länge m. Jedes $v \in \mathcal{V}_m \setminus \mathcal{W}_m$ liegt auf genau einer Jordan-Kette einer Länge $m + l$ für ein $l \geq 1$, d.h. es gibt $w \in \mathcal{W}_{m+l} \subseteq \mathcal{V}_{m+l}$ mit $(A - \lambda I)^l w = v$.
iv) Schreibt man die Jordan-Ketten in der angegebenen Reihenfolge (d.h. beginnend mit v) in die Basis $\mathcal{S}$, so stehen die 1en in den Jordanblöcken *unterhalb* der Diagonalen.
v) Für allgemeines $p(\xi)$ vom Grade q lautet Schritt (b) wiefolgt:

(b) Für $m = r, \ldots, 1$ führe folgende Schritte durch

i. Ergänze die linear unabhängige Menge $\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{U}_{m-1} \cup \mathcal{V}_m$ durch eine Menge $\mathcal{W}_m$ zu einer Basis von $\operatorname{Ker} p(A)^m$, wobei man geeignete Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_{D(m)}$ wählt, so dass

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_m = \{&v_1, Av_1, \ldots, A^{q-1}v_1,\\ &v_2, Av_2, \ldots, A^{q-1}v_2,\\ &\vdots\\ &v_{D(m)}, Av_{D(m)}, \ldots, A^{q-1}v_{D(m)}\}\end{aligned}$$

(es ist $|\mathcal{W}_m| = qD(m)$).

ii. Für jedes $v \in \{v_1, v_2, \ldots, v_{D(m)}\}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} \leftarrow \mathcal{S} \cup \{&v, Av, \ldots, A^{q-1}v,\\ &p(A)v, p(A)Av, \ldots, p(A)A^{q-1}v,\\ &\vdots\\ &p(A)^{m-1}v, p(A)^{m-1}Av, \ldots, p(A)^{m-1}A^{q-1}v\}\end{aligned}$$

und für $i = 0, \ldots, m-1$:

$$\mathcal{V}_{m-i} \leftarrow \mathcal{V}_{m-i} \cup \{p(A)^i v, p(A)^i Av, \ldots, p(A)^i A^{q-1} v\}$$

Probieren Sie das Verfahren jeweils über $K = \mathbb{Q}$ aus an

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

17. Begründen Sie, dass das Verfahren funktioniert.

18. Bestimmen Sie eine Normalmatrix (über $K = \mathbb{R}$) von

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_{2\times 2} & & 0 \\ I_2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 0_{2\times 2} \\ 0 & & I_2 & B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times 2r}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie auch alle möglichen Fälle für allgemeines $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Übung 6

19. Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ betrachte die Abbildung

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}, \quad (x,y) \mapsto y^T A x.$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ überlege man sich:

(a) Sei $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Für welche λ_i ist die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ein Skalarprodukt?

(b) Welche Bedingung muss man allgemein an A stellen, damit $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ein Skalarprodukt ist?

20. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis eines euklidischen/unitären Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

(a) Welche Werte legen $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eindeutig fest?

(b) Welche Beschreibung durch Matrizen und Koordinatenvektoren ergibt sich daraus?

21. Wir betrachten den Vektorraum $C[-1,1]$ mit dem Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ und darin den von $(1, x, x^2, x^3, x^4)$ erzeugten Untervektorraum U.

(a) Geben Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine Orthonormalbasis von U an.

(b) Geben Sie ein Polynom $p(x)$ vom Grad kleiner gleich 2 an, so dass $\langle p(x) - \sin(x), p(x) - \sin(x)\rangle$ minimal wird.

22. Gegeben sei eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ eines unitären Vektorraumes $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ und sei $\mathcal{B}^{ad} = (u_1, \ldots, u_n)$ die zu $\mathcal{B}$ adjungierte Basis. Ferner sei $M = (\mu_{ij})$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}^{ad}$ nach $\mathcal{B}$, also

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} v_i.$$

Wie lassen sich die Einträge von M^{-1} durch die Elemente von $\mathcal{B}$ ausdrücken?

Hausaufgabe 5

Abgabe: Dienstag, 25.06.2013

16. Wir betrachten den Vektorraum $C[-1,1]$ mit dem Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ und der Norm $|f| = \sqrt{\langle f,f\rangle}$.
    (a) Rechnen Sie Aufgabe 21 aus der Übung 6 zu Ende.
    (b) Zeigen Sie, dass $C[-1,1]$ als bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ orthogonale Summe von $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ darstellbar ist, wobei
    $$\mathcal{G} = \{f \in C[-1,1] | f(x) = f(-x)\} \text{ und } \mathcal{U} = \{f \in C[-1,1] | f(x) = -f(-x)\}.$$
    (c) Sei $M_n = \operatorname{span}(\sin(\pi m x), \cos(\pi m x), m = 0,1,\ldots,n)$. Approximieren Sie die Funktion x^2 bestmöglich (bezüglich $|\cdot|$) durch ein Element aus M_n.
    (d) Geben Sie eine Isometrie von M_2 auf den Unterraum der Polynome vom Grade kleiner oder gleich vier an.

17. Gegeben seien zwei Geraden G, H in $\mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden, d.h. $\min\{\|x-y\|,\ x \in G, y \in H\}$. Dabei sei $\|\cdot\|$ die vom Standardskalarprodukt induzierte Norm.

18. Gegeben sei eine Basis $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ eines unitären Vektorraumes $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ und sei $\mathcal{B}^{ad} = (u_1,\ldots,u_n)$ die zu $\mathcal{B}$ adjungierte Basis. Ferner sei $M = (\mu_{ij})$ die Matrix des Basiswechsels von $\mathcal{B}^{ad}$ nach $\mathcal{B}$, also
    $$u_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_{ij} v_i.$$
    Wie lassen sich die Einträge von M^{-1} durch die Elemente von $\mathcal{B}$ ausdrücken?

19. Es bezeichne $\mathcal{P}_n$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich n. Wir statten $\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$ jeweils mit dem Skalarprodukt aus Aufgabe 16 aus und betrachten die Abbildung $F:\ \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2$, $g(x) \mapsto Fg(x) = xg(x)$. Bestimmen Sie F^{ad}, etwa indem sie angeben, was es mit einer geeigneten Basis tut.

Übung 7

23. Es seien V, W endlichdimensionale euklidische (oder unitäre) Vektorräume. Zeigen Sie, dass das Bilden der adjungierten Abbildung

$$\cdot^{\mathrm{ad}} : \mathrm{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W, V),\ F \mapsto F^{\mathrm{ad}}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist. Zeigen Sie ferner $(F \circ G)^{\mathrm{ad}} = G^{\mathrm{ad}} \circ F^{\mathrm{ad}}$.

24. Analog zur Charakterisierung der orthogonalen 2×2 Matrizen (vor Satz 9.33) geben Sie eine Charakterisierung der unitären 2×2 Matrizen an.

25. Gegeben sei die 3×2 Matrix A und Vektoren b_1, b_2 durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ jeweils $x \in \mathbb{R}^2$, so dass $\|Ax - b_i\|$ kleinst möglich wird. Dabei sei $\|\cdot\|$ die durch das Standardskalarprodukt induzierte Norm.

Hausaufgabe 6

Abgabe: 9. Juli 2013

20. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind, wobei

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

    Wieviele solcher Basen gibt es?

21. Lösen Sie Aufgabe 23 aus Übung 7.

22. Zeigen Sie: Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A und jeder ungeraden natürlichen Zahl n existiert eine reelle symmetrische Matrix B mit $B^n = A$. Bestimmen Sie eine Quadratwurzel von A und eine Kubikwurzel von B, d.h. symmetrische Matrizen C, D mit $C^2 = A$ und $D^3 = B$. Dabei sind

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 59 & -38 \\ -38 & 116 \end{bmatrix}.$$

23. Es sei $\|\cdot\|$ eine submultiplikative Matrixnorm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ und $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$.

    (a) Zeigen Sie: Ist für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\|A\| < R$ dann existiert $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n A^n$.

    (b) Was ist dann $f(A)$ für

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \text{ und } A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}?$$

    (c) Was ist $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ für A mit $\|A\| < 1$?

    (d) Was ist $\exp(A)$ für

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Übung 8

26. Wir hatten uns am Beispiel der Matrix A aus Übung 7, Aufgabe 25 überlegt, wie man x_0 bestimmt, so dass $\|Ax_0 - b\| = \min\{\|Ax - b\|, x \in \mathbb{R}^2\}$. Dazu wurde b orthogonal auf $b_0 \in \mathrm{Im}A$ projiziert und dann x_0 als Lösung von $Ax = b_0$ gewonnen. Ferner wurden alle Linksinversen von A bestimmt. Sei nun $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}A = n$. Die Matrix $A^\dagger \in \mathbb{R}^{n\times m}$ werde wiefolgt konstruiert:

   (1) Bestimme eine Basis $a_{n+1}, \ldots, a_m$ von $\mathrm{Ker}A^T$ und setze $\hat{A} = [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m]$.

   (2) $A^\dagger$ bezeichne nun die Matrix, die aus den ersten n Zeilen von $\hat{A}^{-1}$ besteht, also

   $$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{pmatrix} \text{ und } A^\dagger = \begin{pmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

   Anmerkung: $(c_1, \ldots, c_m)$ ist die zu $(a_1, \ldots, a_m)$ adjungierte Basis von $\mathbb{R}^m$, $c_i^T a_j = \delta_{ij}$.

   (a) Berechnen Sie $A^\dagger$ für $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und berechnen Sie $A^\dagger A$. Zeichnen Sie $\mathrm{Im}A$ und $\mathrm{Ker}A^T$ in ein Koordinatensystem und tragen Sie ferner die Punkte b und $AA^\dagger b$ in die Zeichnung ein für $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Beschreiben Sie die Abbildung $AA^\dagger$ geometrisch.

   (b) Zeigen Sie, dass allgemein $A^\dagger$ eine Linksinverse von A ist, also $A^\dagger A = I_n$.

   (c) Zeigen Sie, dass für jedes $b \in R^m$ gilt: Mit $x_0 = A^\dagger b$ gilt

   $$\|Ax_0 - b\| = \min\{\|Ax - b\|, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

   Erinnerung: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt stets: $\mathbb{R}^m = \mathrm{Ker}A^T \oplus \mathrm{Im}A$ wobei die Summe orthogonal ist, denn für $y \in \mathrm{Ker}A^T$ und $v = Ax \in \mathrm{Im}A$ ist $(Ax)^T y = x^T A^T y = x^T 0 = 0$ und $m = \mathrm{Rang}A^T + \dim \mathrm{Ker}A^T = \mathrm{Rang}A + \dim \mathrm{Ker}A^T$.

   (d) Berechnen Sie $A^\dagger$ für

   $$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

27. (a) Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$. Zeichnen Sie $\mathrm{Ker}A$ und $\mathrm{Ker}A^T$ in ein Koordinatensystem ein. Zeichnen Sie ferner die Lösungsmenge von $Ax = b$ für $b = 2, 3$ ein. Berechnen Sie ferner die Matrix $P = A^T(AA^T)^{-1}$ und tragen Sie die Punkte Pb ein. Wie kann man Pb geometrisch deuten?

   (b) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\mathrm{Rang}A = m$. Zeigen Sie, dass $P = A^T(AA^T)^{-1}$ existiert und eine Rechtsinverse von A ist. Zeigen Sie ferner, dass für $b \in \mathbb{R}^m$ $\tilde{x} = Pb$ diejenige Lösung von $Ax = b$ mit kleinster euklidischer Norm ist.

Übung 9

28. Gegeben seien $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ mit ihren jeweiligen Standardskalarprodukten. Ferner seien eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^3$, eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^2$ und $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\mathcal{A} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   (a) Bestimmen Sie die adjungierten Basen $\mathcal{A}^{ad}$ und $\mathcal{B}^{ad}$.

   (b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F^{ad} bezüglich einer clever gewählten Basis.

   (c) Bestimmen Sie $\mathcal{M}_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}(F^{ad})$, wobei für $i \in \{2,3\}$ $\mathcal{E}_i$ jeweils die Standardbasis von $\mathbb{R}^i$ bezeichnet.

29. Wir betrachten den Vektorraum $\mathcal{P}_n$ der Polynome vom Grade $\leq n$ mit dem Skalarprodukt $(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ und der Norm $|f| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$.

   (a) Berechnen sie die Gram-Matrix G_n von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_n = (1, x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Wie kann man nun konkret $\langle p(x), q(x) \rangle$ ausrechnen?

   (b) Geben Sie die adjungierten Basen $\mathcal{B}_1^{ad}$ und $\mathcal{B}_2^{ad}$ von $\mathcal{P}_1$ bzw. $\mathcal{P}_2$ an.

   (c) Geben Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung $F : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$, $x \mapsto xp(x)$ bezüglich $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ an.

   (d) Geben Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung $F^{ad} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ bezüglich der dualen Basen $\mathcal{B}_1^{ad}$ und $\mathcal{B}_2^{ad}$ an.

   (e) Geben Sie die Darstellungsmatrix der Abbildung $F^{ad} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ bezüglich $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ an.

30. Sei V ein 2-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $F : V \to V$ ein Endomorphismus mit der Eigenschaft $F^{ad} = \alpha F$. Für welche α existiert so ein F, falls $F \neq 0$ gefordert ist? Was kann man über die Darstellungsmatrix bezüglich einer Orthonormalbasis aussagen?