H1

1) $a', b', c', d' \in K$ beliebig. Dann sind äquivalent

a) $\exists$ genau ein $\underbrace{p}_{\deg p \leq 3}$, mit $p(a)=a'$, $p(b)=b'$, $p(c)=c'$, $p(d)=d'$.

b) $a \neq b$, $a \neq c$, $a \neq d$, $b \neq c$, $b \neq d$, $c \neq d$.

Bew: a) $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{bmatrix}$ eindeutig lösbar

$\Leftrightarrow \det(\quad) = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ b) $\square$

3) $M^{B_1}_{B_2}(\varphi)$ bestimmen: Für $b \in B_1$ stelle $\varphi(b)$ durch die Elemente von B_2 dar:

$$\varphi(1) = 1' = \underline{0} \cdot x^3 + \underline{0} \cdot (x^3-1) + \underline{0} \cdot (x^3-x) + \underline{0} \cdot (x^3-x^2)$$

$$\varphi(x) = 1 = \underline{1} \cdot x^3 + \underline{(-1)} (x^3-1) + \underline{0} \cdot (x^3-x) + \underline{0} (x^3-x^2)$$

$$\varphi\left(\frac{x(x-1)}{2}\right) = x - \frac{1}{2} = \underline{\frac{1}{2}} x^3 + \underline{\frac{1}{2}} (x^3-1) + \underline{(-1)} (x^3-x) + \underline{0} (x^3-x^2)$$

$$\varphi\left(\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{3} = \underline{\frac{-5}{6}} x^3 + \underline{\frac{1}{3}} (x^3-1) + \underline{1} (x^3-x) + \underline{\left(-\frac{1}{2}\right)} (x^3-x^2)$$

$$M^{B_1}_{B_2}(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1/2 & -5/6 \\ 0 & -1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

H2,6

a) $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$

b) $p_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda+2)$.

EWe sind $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -2$ die entspr.

EVen sind die Spalten von $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/4 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $S^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

d) $S^{-1} A S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \Lambda$

e) gesucht: $S^{-1}\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = S^{-1}A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = S^{-1}(S\Lambda S^{-1})^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$= S^{-1}\underbrace{S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{I_3}\Lambda S^{-1} \cdots S\Lambda \underbrace{S^{-1}S}_{I_3}\Lambda S^{-1}}_{n\text{-mal}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

$= \Lambda^n S^{-1}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \underset{\text{mit c)}}{=} \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

f) $S \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} (-1)^{n+1} + 1 \\ (-1)^n + 1 \\ (-1)^{n+1} + 1 \end{bmatrix}$

7. Bestimme A^n. $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & B & \\ & & B \end{bmatrix}$ blockdiagonal

$$\Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1^n & & \\ & B^n & \\ & & B^n \end{bmatrix}.$$ Was also ist B^n?

$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $P_B(T) = (T-z)(T-\bar{z})$, $z = 3+i$

EV von B zu z: $\left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$

$\bar{z}$: $\left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

Mit $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$ ist $T^{-1}BT = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix} = \Lambda$

$$B^n = (T\Lambda T^{-1})^n = T\Lambda^n T^{-1} = T\,\mathrm{Diag}(z^n, \bar{z}^n)\,T^{-1}$$

Stelle $z = 3+i$ in Polarkoordinate dar

$z = re^{i\varphi}$, $r = \sqrt{10}$, $\varphi = \arctan\frac{1}{3}$

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n\cos(n\varphi) + ir^n\sin(n\varphi)$$

$$\bar{z}^n = r^n e^{-in\varphi} = r^n\cos(n\varphi) - ir^n\sin(n\varphi)$$

$$\Rightarrow B^n = T\,\mathrm{Diag}(z^n, \bar{z}^n)\,T^{-1} = \begin{bmatrix} r^n\cos(n\varphi) & r^n\sin(n\varphi) \\ -r^n\sin(n\varphi) & r^n\cos(n\varphi) \end{bmatrix}$$

Drehstreckung, Drehung um $n\varphi$ im Uhrzeigersinn

HA 3.8: Für jedes N soll die binomische Formel gelten, insbesondere $N=2$:

$$(A+B)(A+B) = A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$\Rightarrow BA = AB.$$

D.h. $BA=AB$ ist notwendig. Es ist auch hinreichend, Beweis funktioniert wie im Fall wenn A, B reelle Zahlen sind (siehe LA I).

$$A_\lambda = \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda\end{pmatrix}}_{\Lambda} + \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & 0\end{pmatrix}}_{M}, \quad \Lambda, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Klar: $\Lambda M = M\Lambda$, $\Lambda^k = \mathrm{Diag}(\lambda^k, \dots, \lambda^k)$

$M^k = ?$ Fallunterscheidung notwendig:

$k<n$: $\begin{bmatrix} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0\end{bmatrix}$ $\qquad$ $k \geq n$: $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$$A_\lambda^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \Lambda^{N-k} M^k =$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^N & \binom{N}{1}\lambda^{N-1} & \cdots & \binom{N}{N}\lambda^0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \binom{N}{N}\lambda^0 \\ & \mathcal{O} & & & & & \vdots \\ & & & & & & \binom{N}{N}\lambda^{N-1} \\ & & & & & & \lambda^N \end{bmatrix} \qquad N < n$$

$$\begin{bmatrix} \lambda^N & \binom{N}{1}\lambda^{N-1} & \cdots & \lambda^{N-(n-2)}\binom{N}{n-2} & \lambda^{N-(n-1)}\binom{N}{n-1} \\ & \ddots & \ddots & & \lambda^{N-(n-2)}\binom{N}{n-2} \\ & & & & \vdots \\ & \mathcal{O} & & & \lambda^{N-1}\binom{N}{1} \\ & & & & \lambda^N \end{bmatrix} \qquad N \geq n$$

9) Für $\mathcal{B} = (1, x, x^2, \dots, x^n)$ ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & \mathcal{O} & & \ddots & n \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$

$(x^j \mapsto j x^{j-1})$

$\Rightarrow P_A(\xi) = \xi^{n+1}$. Es ist $A^n(x^n) = n! \neq 0$ (x^n n-mal abgeleitet), also $m_A(\xi) = P_A(\xi) = \xi^{n+1}$.

Sei $f(x) = \sum_{l=0}^{k} f_l x^l$, $f_k \neq 0$. Dann ist $[f]_A$

$= \operatorname{span}(f(x), f'(x), \dots, f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x) = 0)$

$= \operatorname{span}(x^k, x^{k-1}, \dots, 1)$.

Insbesondere ist P_n A-zyklisch: Für jedes $f(x)$ mit $\deg f(x) = n$ gilt ja $[f]_A = P_n = \mathrm{span}(1, x, \ldots, x^n)$

10. • Ist $h(x) = h_0 + \ldots + h_n x^n \in I$ mit $h_n \neq 0 \Rightarrow \frac{h(x)}{h_n} \in I$

(da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}[x]$)

• Gibt es so ein $m(x)$, dann gilt notwendig:

$\forall h(x) \in I : \deg h(x) \geq \deg m(x)$

(denn $h(x) = q(x) m(x) \Rightarrow \deg h = \deg q + \deg m$)

• Sei also $m(x) \in I$ ein Polynom <u>kleinsten Grades</u> in I, oBdA normiert.

Sei $h(x) \in I$ beliebig. Division mit Rest von h durch m liefert

$$h(x) = q(x) m(x) + r(x), \quad r(x) = 0 \text{ oder } r(x) \neq 0 \text{ und } \deg r(x) < \deg m(x)$$

Da aber $r(x) = \underbrace{h(x)}_{\in I} - \underbrace{\underbrace{q(x)}_{\in \mathbb{R}[x]} \underbrace{m(x)}_{\in I}}_{\Rightarrow \in I} \in I$, kann $r(x) \neq 0$

nicht sein, da $\deg(m(x))$ minimal in I!

Also $r(x) = 0$ und $m(x) \mid h(x)$. $\square$

Übung 4 Nr. 15

F diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $P_F(z)$ zerfällt und $m_F(z)$ hat nur einfache NSen

„$\Rightarrow$“ Allgemein: Ist $p(z)$ ein Polynom und $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, dann ist $p(\Lambda) = \text{diag}(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$. Das gradkleinste $p(z)$ mit $p(\Lambda) = 0$ ist also $(z-\mu_1)\cdots(z-\mu_r)$, wobei $\{\underbrace{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}_{\text{mit Vielfachheiten}}\} = \{\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_r}_{\text{ohne Vielfachheit}}\}$ und $\mu_i \neq \mu_j$, $i \neq j$.

„$\Leftarrow$“ Allgemein gilt für blockdiagonale Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{A_1} & & & 0 \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{A_\ell} \end{bmatrix} =: \text{Bdiag}(A_1, \dots, A_\ell)$$

und ein Polynom $p(z)$:

$p(A) = \text{Bdiag}(p(A_1), \dots, p(A_\ell))$, insbesondere gilt $m_A(A_i) = 0$ und deshalb $m_{A_i} \mid m_A$.

Zum eigentliche Beweis von „$\Leftarrow$“: $P_F(z)$ zerfällt $\Rightarrow$ F hat Darstellungsmatrix in Jordan Normalform. Das Minimalpolynom eines Jordanblocks J zum EW λ der Größe r ist gerade $(z-\lambda)^r$. Weil

$m_J(\lambda) \mid m_F(\lambda)$ und $m_F(\lambda)$ nur einfache NSen hat muss $r=1$ sein. Also hat jeder Jordanblock Größe 1, d.h. die JNF ist Diagonalmatrix $\square$

<u>HA 4</u> <u>14</u>: Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ bezeichnen wir mit $\overline{v} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$, ebenso definiere wir $\overline{B}$ für $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$

Sei $v \in \ker B$, d.h. $Bv = 0 = \overline{0} = \overline{(Bv)} = \overline{B}\,\overline{v}$
$\Rightarrow \overline{v} \in \ker \overline{B}$.

<u>Hier</u>: $v \in \mathrm{Hau}(A, \lambda) = \ker (A - \lambda I)^r$
$\Rightarrow \overline{v} \in \ker \overline{(A-\lambda I)^r}$ und $\overline{(A-\lambda I)^r} = \overline{(A-\lambda I)}^r$
$= (\overline{A} - \overline{\lambda} I)^r \underset{\uparrow A \text{ reell}}{=} (A - \overline{\lambda} I)^r$

$\ker (A - \overline{\lambda} I)^r = \mathrm{Hau}(A, \overline{\lambda})$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{Hau}(A,\lambda)} = \mathrm{Hau}(A, \overline{\lambda})$

<u>12</u>: Wg Ü 4 Nr 15 ist F über $\mathbb{C}$ diag.bar. Für $K = \mathbb{R}$ ist $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ein Gegenbeispiel für $N=4$, $F^5 - F = 0$.

HA5 16 b) Sei $g \in G$ und $u \in U$, dann ist

$h(x) = g(x)\,u(x) \in U$ (denn $g(-x)u(-x) = g(x)\cdot(-1)u(x)$)

$$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = \int_{-1}^{0} h(x)\,dx + \int_{0}^{1} h(x)\,dx = \int_{1}^{0} \underbrace{h(-t)\cdot(-1)}_{h(t)}\,dt + \int_{0}^{1} h(x)\,dx$$

$-x = +t$
$dx = -dt$

$$= -\int_{0}^{1} h(t)\,dt + \int_{0}^{1} h(x)\,dx = 0$$

c) $\sin(n\pi x) \in U$, $\cos(m\pi x) \in G$, also $\sin \perp \cos$

Ferner $\langle \sin(m\pi x), \sin(n\pi x)\rangle = \delta_{m,n} = \langle \cos(m\pi x), \cos(n\pi x)\rangle$

$m \neq n$

$$A = \int_{-1}^{1} \underset{u}{\cos(m\pi x)}\,\underset{v'}{\cos(n\pi x)}\,dx = \underbrace{\cos(m\pi x)\sin(n\pi x)\cdot\frac{1}{n\pi}\Big|_{-1}^{1}}_{=0}$$

$$- \int_{-1}^{1} \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)\cdot(-m\pi)\sin(m\pi x)\,dx$$

$$= \frac{m}{n}\underbrace{\int_{-1}^{1} \underset{u}{\sin(n\pi x)}\cdot\underset{v'}{\sin(m\pi x)}\,dx}_{B}$$

$$= \frac{m}{n}\underbrace{uv\Big|_{1}^{-1}}_{=0} + \left(\frac{m}{n}\right)^2 A \Rightarrow \left(1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right)A = 0$$

Ist also $m \neq n$, dann ist $A = 0$

$m = n$: $B = \int_{-1}^{1} \sin(\pi n x)^2\,dx = \int_{-1}^{1} 1 - \cos(\pi n x)^2\,dx$

$$2 - \int_{-1}^{1} \cos(\pi n x)^2\,dx \Rightarrow 2A = 2.$$

Es bilden also $\left\{ \frac{\cos(0\cdot\pi x)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}^{=b_0}, \underbrace{\sin(n\pi x)}_{a_n}, \underbrace{\cos(n\pi x)}_{b_n}, n = 1,\dots,N \right\}$ eine ONB von M_n.

Projektion von x^2 auf M_n:

$$\langle x^2, b_0\rangle b_0 + \sum_{n=1}^{N} \langle x^2, b_n\rangle b_n + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\langle x^2, a_n\rangle}_{0, \text{ da } x^2 \text{ gerade}} a_n$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{4 \cdot \cos(n\pi)}{n^2\pi^2}}_{\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2\pi^2}} \cos(n\pi x)$$

d) Vgl. Satz 9.25. In a) berechnet: ONB $p_0, \dots, p_4$ von P_4. Die Zuordnungen $p_0 \mapsto b_0$, $p_1 \mapsto a_1$, $p_2 \mapsto b_1$, $p_3 \mapsto a_2$, $p_4 \mapsto b_2$ definieren eine Isometrie $P_4 \to M_2$.

__HA6__ Es ist $AB = BA$ und A, B beide symmetrisch also diagonalisierbar mit ONB aus EVen. 9.45 $\Rightarrow$ Aufgabe lösbar

A hat EWe $1, -1$, $\mathrm{Eig}(A,1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}-1/2\\+1/2\\1\end{pmatrix}\right) \quad (1)$$

B hat EWe $-1, 2$ $\quad \mathrm{Eig}(B,-1) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) \quad (2)$

$$\mathrm{Eig}(B,2) = \mathrm{span}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

Wg. (1) und (2) (dim = 1 !) hat man keine Wahl als $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ und, senkrecht dazu, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ zu nehmen!

8 Vorzeichenkombinationen $\times$ 6 Permutationen der 3 Vektoren = 48 solcher Basen!

2 1. 9.20: F^{ad} existiert und ist eindeutig bestimmt:

Seien nun $F, G: V \to W$. Dann gilt $\forall v \in V\ \forall w \in W$:

$\langle (F+G)v, w \rangle_W = \langle Fv + Gv, w \rangle_W$

$= \langle Fv, w \rangle_W + \langle Gv, w \rangle_W = \langle v, F^{ad} w \rangle_V + \langle v, G^{ad} w \rangle_V$

$= \langle v, (F^{ad} + G^{ad}) w \rangle_V$, d.h. $F^{ad} + G^{ad}$

adjungiert zu $F+G \xRightarrow[9.20]{\text{Eind.}} (F+G)^{ad} = F^{ad} + G^{ad}$

Weiter $\langle (\alpha F)v, w \rangle_W = \langle \alpha F v, w \rangle_W = \alpha \langle v, F^{ad} w \rangle_V$

$= \langle v, \overline{\alpha} F^{ad} w \rangle_V = \langle v, (\overline{\alpha} F^{ad}) w \rangle_V$

$\Rightarrow \overline{\alpha} F^{ad}$ adj. zu (αF).

Sei nun $F: V \to W$, $G: W \to Z$. $\forall v \in V, z \in Z$:

$\langle (G \circ F) v, z \rangle_Z = \langle F v, G^{ad} z \rangle_W = \langle v, F^{ad} \circ G^{ad} z \rangle_V$

$\Rightarrow F^{ad} \circ G^{ad}$ adj. zu $G \circ F$ $\square$

23a) Cauchy-Kriterium und Dreiecksungleichung: Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum f_n \|A\|^n$ existiert, gibt es N_0, so daß $\forall\, m > n \geq N_0$ gilt

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} f_k A^k\right\| \underset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} f_k \|A^k\| \underset{\text{Submult.}}{\leq} \sum_{k=n}^{m} f_k \|A\|^k < \varepsilon.$$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k A^k$ existiert.

b) $f\left(\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & 0 \\ 0 & f(\mu)\end{pmatrix}$

$$f\left(\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) \\ 0 & f(\lambda)\end{pmatrix}$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$ ex. nach a) und

$$(I-A)\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I + A + A^2 + \dots) - (A + A^2 + \dots) = I$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I-A)^{-1}$$

d) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix}$

$$\exp(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{3}\end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix}$$