

Diplomarbeit

„Bahnoptimierung beim
Laser-Remote-Schweißen“

Danny Messig

Fakultätsbetreuer: Prof. C. Helmberg

Betriebsbetreuer: D. Wenzel

9. April 2008

Aufgabenstellung

Beim scannergestützten Laser-Remote-Schweißen (Welding on the Fly) bestehen zahlreiche Freiheiten in der Positionierung des Werkzeuges zum Werkstück. Bei einer vorgegebenen Reihenfolge der Schweißfiguren wurden bereits Verfahren zur automatischen Bahngenerierung untersucht. Aufgabe der Diplomarbeit ist die Entwicklung und Analyse von Methoden zur Bestimmung von Figurenreihenfolgen, die eine möglichst günstige Bahn erzeugen lassen. Die technisch vorgegebenen Randbedingungen müssen hierbei geeignet nachgebildet werden. Zur Realisierung sollen auch Verfahren der diskreten Optimierung betrachtet werden, die möglichst gute Abschätzungen der Lösungsqualität erlauben.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenstellung	1
1 Einleitung	4
1.1 Motivation	4
1.2 Notation	5
2 Technischer Hintergrund	7
2.1 Ortsfestes Laserschweißen	7
2.2 Robotergeführtes Laser-Remote-Schweißen	20
3 Bahnmodellierung	26
3.1 Idealmodell	26
3.2 Linearisiertes Modell	28
3.3 Normen	30
4 Figurengelbundenes Modell	32
4.1 Einführung der Indikatoren	32
4.2 Modell unter Verwendung der Indikatoren	35
4.3 Lösungsansatz mittels TSP	35
4.4 Lösungsansatz über k -Tupel von Schweißfiguren	43
4.5 Lösungsansatz durch Bilden von Gruppen	44
5 Diskretisierungen	45
5.1 Diskretisierung der Aufenthaltsbereiche	45
5.2 Diskretisierung der einschließenden Box	50
6 Weitere Modellierungsansätze	54
6.1 Kombination aus Set Covering und TSP	54
6.2 Ansatz zur Bestimmung einer Figurenreihenfolge	55
6.3 Ansatz zur Bahnapproximation	58
7 Das Traveling Salesman Problem	61
7.1 Einführung des TSP	61
7.2 Mathematische Modellierung des symmetrischen TSP	62
7.3 Lösungsstrategie für TSP-Anwendungen	65
7.4 Schranken für den Optimalwert des TSP	66
7.5 Verallgemeinerungen des TSP	67
8 Zusammenfassung und Ausblick	69

Abbildungsverzeichnis	71
Literaturverzeichnis	72
A Algorithmen	74
A.1 Indikatoranpassung	74
A.2 Quaderbestimmung	76
A.3 Nützliche Algorithmen	78
Selbständigkeitserklärung	80

1 Einleitung

1.1 Motivation

Laser gewinnen in der industriellen Fertigung immer mehr an Bedeutung, denn sie verfügen über einzigartige Eigenschaften. Sie strahlen ein Licht aus, das seine Energie in einem gebündelten Strahl zusammenhält.

Seit Verfügbarkeit von Hochleistungslasern Ende der achtziger Jahre wurde über den Einsatz von Lasern zum Schweißen nachgedacht. Automobilhersteller wie Volkswagen, BMW und Daimler AG sowie deren Zulieferer verwenden Laser zum Schneiden, Beschriften und Schweißen. Ein wesentliches Problem der im Automobilbau eingesetzten Laserschweißanlagen resultiert aus der noch stark auf das Punktschweißen ausgerichteten Konstruktion der Bauteile.

Beim robotergestützten Remote-Schweißen ist ein Scanner, bestehend aus Ablenk- und Fokussieroptik, in einen Roboterarm integriert. Spiegel positionieren den Laserstrahl extrem schnell an jede Stelle innerhalb des Bearbeitungsfeldes. Schweißobjekte können damit geschweißt werden, ohne dass sich Werkstück oder Fokussieroptik bewegen.

Der Einsatz des Laser-Remote-Schweißens (Abschnitt 2.1) hätte starke Verkürzungen in der Bearbeitungs- und Positionierzeit zur Folge, was diese Schweißart als zukunftssträchtige Technologie ausweist. Trotzdem existieren noch keine Algorithmen, die einer Schweißaufgabe ihre optimale Roboterbahn zuordnen. Bei den heute in der Automobilindustrie eingesetzten Laserschweißanlagen stützt man sich noch sehr auf empirische Daten. Im Zuge der Automatisierung der Industrie besteht die Nachfrage nach Algorithmen, die eine Bahngenerierung ermöglichen. Problematisch und kaum beherrschbar ist bei einem System mit derart vielen Freiheitsgraden auch das manuelle Programmieren der Schweißbahnen. Um diesen Vorgang handhabbar zu machen, entwickelt die Firma Hörmann Engineering eine angepasste Offline-Programmierung, die zusätzlich Strategien zur Verfahrensoptimierung enthalten wird.

Die vorliegende Arbeit ist Teil dieser Entwicklung und stellt Modellierungsansätze vor.

1.2 Notation

Zu Beginn wird ein Teil der verwendeten Notation vorgestellt.

Die Menge der *natürlichen Zahlen*, beginnend mit der Eins, sei mit \mathbb{N} bezeichnet. Fügen wir den natürlichen Zahlen die Null hinzu, erhalten wir die Menge $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die *ganzen Zahlen* \mathbb{Z} sind durch $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup -\mathbb{N}$ gegeben.

Wir definieren die mathematische Funktion mod , die den Rest aus der Division zweier ganzer Zahlen angibt, das heißt,

$$(a \text{ mod } m) := a - \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor \cdot m.$$

Mit \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, sei die Menge der *n-dimensionalen reellen Zahlen* bezeichnet und mit $\|\cdot\|$ die zugehörige *euklidische Norm*, welche sich durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$$

berechnet.

Unter $\mathcal{P}(M)$ für $M \subset \mathbb{R}^n$ wollen wir die *Potenzmenge zur Menge M* verstehen, das heißt,

$$\mathcal{P}(M) := \{W : W \subset M\}.$$

Für einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ bezeichne x_i stets dessen *i-te Komponente*.

Auf der Menge \mathbb{R}^n sei das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie folgt definiert:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i.$$

Die Vektoren $e^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \dots, n\}$, bezeichnen die kanonischen Basisvektoren mit

$$e_j^{(i)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für den Vektor $e \in \mathbb{R}^n$ gelte stets $e_i = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Die Menge der Vektoren aus der Einheitskugel sei mit

$$\mathbb{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

abgekürzt.

Für Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ definieren wir die Relation $x < y$, wenn dies komponentenweise gilt, das heißt,

$$x < y := \Leftrightarrow x_i < y_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Analog sind die Relationen $x > y$, $x \leq y$ und $x \geq y$ definiert.

Unter $\mathbb{R}^{n \times m}$ wollen wir die reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten verstehen.

Im Folgenden bezeichnen $(M_1, \|\cdot\|_{M_1})$ und $(M_2, \|\cdot\|_{M_2})$ stets die Banachräume M_1 und M_2 mit den zugehörigen Normen $\|\cdot\|_{M_1}$ und $\|\cdot\|_{M_2}$.

Für $x \in M_1$ definieren wir die *abgeschlossene Kugel um x mit Radius r*

$$B_r(x) := \{y \in M_1 : \|y - x\|_{M_1} \leq r\}$$

und die *offene Kugel um x mit Radius r*

$$U_r(x) := \{y \in M_1 : \|y - x\|_{M_1} < r\}.$$

Die Menge

$$\mathcal{F}(M_1, M_2) := \{f : M_1 \rightarrow M_2\}$$

bezeichnet die *Menge der Funktionen von M_1 nach M_2* .

Das *Bild der Funktion $f \in \mathcal{F}(M_1, M_2)$* wird wie folgt abgekürzt:

$$Im(f) := f(M_1) = \{f(m_1) : m_1 \in M_1\}.$$

Des Weiteren sei

$$\mathcal{C}^k(M_1, M_2), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

die Menge der *k -fach stetig differenzierbaren Funktionen* von M_1 nach M_2 .

Die *Menge der maximierenden Argumente der Funktion $f \in \mathcal{F}(M_1, \mathbb{R})$ aus $\mathcal{X} \subset M_1$* wird mit $\text{Argmax} \{f(x) : x \in \mathcal{X}\}$ bezeichnet. Analog definiert Argmin die *Menge der minimierenden Argumente*.

Für Vektoren $v, w \in \mathbb{S}^2$ ($v \neq w$) definiert

$$proj_w(v) := \frac{v - \langle v, w \rangle w}{\|v - \langle v, w \rangle w\|} \in \mathbb{S}^2$$

die *normierte Projektion* des Vektors v in die Ebene mit Normalenvektor w .

2 Technischer Hintergrund

Dieser Abschnitt liefert den technischen Hintergrund für die spätere mathematische Modellierung zum Ermitteln einer Roboterbahn beim Laser-Remote-Schweißen.

2.1 Ortsfestes Laserschweißen

Unter Schweißen versteht man laut DIN 1910 die „unlösbare Verbindung von Bauteilen oder Grundwerkstoffen, unter Anwendung von Wärme oder Druck, mit oder ohne Zusatzwerkstoff“. Laserschweißen wird im Rahmen der DIN 8580 in der Gruppe „Fügen“ und weiter in DIN 8593 Teil 6 den Fertigungsverfahren „Fügen durch Schweißen“ zugeordnet.

Beim Laserschweißen unterscheidet man zwei Ausprägungen: das Wärmeleitungsschweißen und das Tiefschweißen. Welche Art der Schweißung am Bearbeitungsobjekt vollzogen wird, hängt von der Intensität des auftreffenden Laserstrahls ab. Details dazu sollen hier nicht weiter erläutert werden.

Prinzip des Laserschweißens

Die Laserquelle erzeugt die Laserstrahlung und damit die für den Schweißprozess notwendige Energie. Diese wird zum Beispiel über Umlenkspiegel und eine Fokussiereinrichtung dorthin geführt, wo sie auftreffen soll, siehe Abbildung 1.

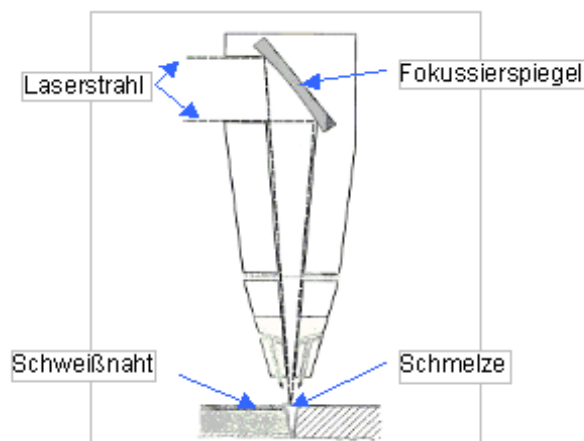


Abbildung 1: Prinzip des Laserschweißens

2.1.1 Laser-Remote-Schweißen

Eine spezielle Form des Laserschweißens ist das Laser-Remote-Schweißen, was soviel wie „Schweißen aus der Ferne“ bedeutet. Dieses Verfahren entstand unter anderem aus den Bedürfnissen der Automobilindustrie nach verbesserten Produktions- und Fertigungsverfahren in Bezug auf Qualität und Quantität heraus.

Strahlenauslenkung

Die Laserstrahlquelle wird dabei nicht selbst über die zu verschweißenden Bauteile geführt, sondern die *Strahlenauslenkoptik* (=SAO) übernimmt eine schnelle und präzise Auslenkung des Strahls.

Es stehen derzeit zwei Systeme zur Verfügung:

Das erste System beinhaltet einen Spiegel; dieser ist in zwei Achsen drehbar. Aufgrund seines geringen Gewichts sind schnelle Auslenkbewegungen des Spiegels möglich. Es reichen schon kleinste Auslenkungen, um große Räume zu überwinden, siehe Abbildung 2.

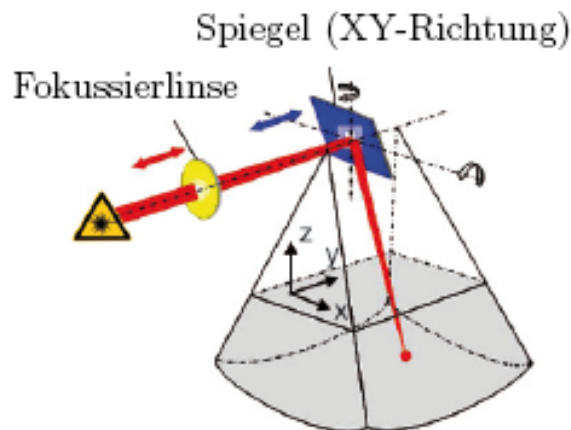


Abbildung 2: Prinzip der SAO

Das zweite System besteht aus zwei Spiegeln, wobei jeder in nur einer Achse bewegbar ist.

Werden keine Signale an die SAO geschickt, befindet sich das Spiegelsystem in *Neutralstellung*. Wir nennen die Richtung des Strahles bei Neutralstellung des Spiegelsystems die *Blickrichtung*. Die SAO ermöglicht Auslenkungen bis zu einem maximalen *Auslenkwinkel* γ^* von der Blickrichtung, dieser Parameter ist abhängig von der verwendeten SAO.

Fokussierung des Laserstrahles

Damit der Laserstrahl über die großen Entfernungen hinweg stets mit gleichem Fokus auf das Werkstück trifft, erfolgt der Einsatz einer *Fokussieroptik* zwischen Laserstrahlquelle und Auslenkspiegel. Die Fokussierung wird notwendig, da die Energiedichte paralleler Laserstrahlen zu gering für eine Schweißung ist. Die Verwendung der Fokussieroptik ermöglicht das *Höhenspiel* h , welches Fokussierlängen im Intervall $[f - h, f + h]$ erlaubt, wobei wir den optikspezifischen Parameter f *Fokusslänge* beziehungsweise *Brennweite* nennen. Die Kombination aus Fokussieroptik und SAO wird häufig als *Scanner* bezeichnet.

Zu beachten ist der Unterschied zwischen Ort der SAO und der virtuellen *Strahlenquelle* S , welche sich meist außerhalb des Scanners befindet. Zur Erläuterung dient Abbildung 3.

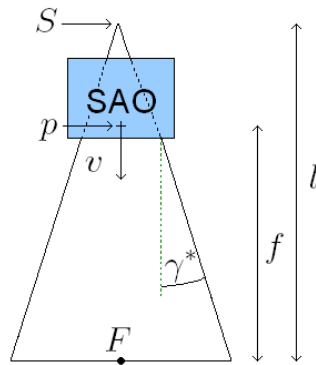


Abbildung 3: Virtuelle Strahlenquelle

Dabei bezeichnet $p \in \mathbb{R}^3$ den Ort der SAO, $v \in \mathbb{S}^2$ deren Blickrichtung und $F \in \mathbb{R}^3$ den *Fokuspunkt*, welcher durch $F = p + f \cdot v$ gegeben ist. Die virtuelle Strahlenquelle S ergibt sich aus $S = F - l \cdot v$, wobei der optikspezifische Wert l virtuelle *Strahlenlänge* genannt wird.

Vorteile des Laser-Remote-Schweißens

Die Vorteile des Remote-Schweißens gegenüber dem Punktschweißen liegen weniger in der verkürzten Schweißzeit selbst, sondern vielmehr in der Möglichkeit, das Werkstück über große Flächen hinweg zu bearbeiten, sowie in der Reduzierung der Positionier- und Verfahrszeiten zwischen den einzelnen Schweißobjekten einer Schweißaufgabe.

Laser-Remote-Schweißen verbindet also die verbesserte Zustellung zwischen Werkzeug und Werkstück mit kurzen Bearbeitungszeiten und guter Schweißqualität.

2.1.2 Schweißaufgabe

Definition 2.1.

Eine Schweißaufgabe besteht darin, N Schweißobjekte auf einer Oberfläche zu schweißen. Das Schweißobjekt j , $j \in \{1, \dots, N\}$, hat konkret folgende Gestalt:

$$\{(K_j(t), n_j(t)) : t \in [0, 1]\},$$

wobei $K_j \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und $n_j \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{S}^2)$ gegebene Funktionen sind.

Die Funktion K_j beschreibt eine Kurve auf der Oberfläche. Der Vektor $n_j(t)$ stellt die zum Punkt $K_j(t)$ gehörige Oberflächennormale aus \mathbb{S}^2 zur Zeit t dar.

Definition 2.2.

Das Schweißzentrum p_j ist der auf die Oberfläche projizierte Mittelpunkt der kleinsten Einheitskugel zur Kurve K_j und die Ausdehnung r_j des Schweißobjektes j wird folgendermaßen definiert:

$$r_j := \max_{t \in [0, 1]} \|p_j - K_j(t)\| \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}.$$

Ohne Einschränkung gelte dabei

$$r_j < h \quad \forall j \in \{1, \dots, N\},$$

sonst wird das betreffende Schweißobjekt zerteilt.

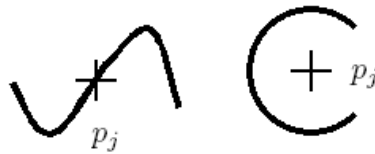


Abbildung 4: Mögliche Schweißkurven und ihre Schweißzentren

Zur Datenreduktion betrachten wir nur das Schweißzentrum p_j und die zugehörige Oberflächennormale n_j anstatt des gesamten Schweißobjektes j . Wir können von einer einheitlichen Oberflächennormalen ausgehen, da die Ausdehnung eines Schweißobjektes klein ist und die Oberfläche lokal eine geringe Krümmung aufweist.

Definition 2.3.

Wir bezeichnen die Kombination (p, v) aus Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ und Vektor $v \in \mathbb{S}^2$ als Figur. Gilt $p = p_j$ und $v = n_j$, so heißt (p, v) Schweißfigur j . Die Menge der Schweißfiguren werde durch $\mathbb{F} := \{(p_1, n_1), \dots, (p_N, n_N)\}$ abgekürzt.

Um eine Figur zu schweißen, muss der Energieeintrag des Lasers in die Oberfläche genügend groß sein, das heißt, der Einstrahlwinkel α zwischen einfallendem Strahl und Vektor $-v$ darf einen technisch gegebenen Grenzwinkel γ_{max} nicht übersteigen. Die Menge der Vektoren, deren entgegengerichteten Vektoren einen ausreichenden Energieeintrag für Figur (p, v) sicherstellen, bilden den Einstrahlkegel $C_E(v)$, vergleiche Abbildungen 5 und 6.

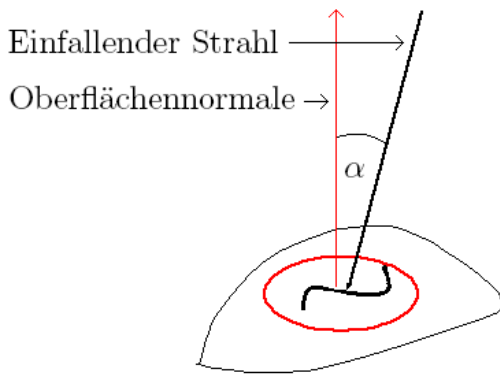


Abbildung 5: Einstrahlwinkel α

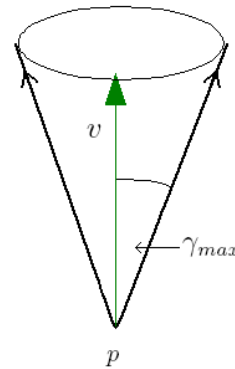


Abbildung 6: Einstrahlkegel

Definition 2.4.

Der Einstrahlkegel $C_E(v)$ ist definiert durch

$$C_E(v) := \{w \in \mathbb{S}^2 : \langle w, v \rangle \geq \cos \gamma_{max}\}.$$

Eine Figur (p, v) heißt schweißbar von der Laserrichtung $w \in \mathbb{S}^2$, wenn der negierte Richtungsvektor $-w$ in $C_E(v)$ liegt.

Aufgrund der Ausdehnung des Schweißobjektes j verringert sich der Grenzwinkel für Schweißfigur j auf einen spezifischen Wert γ_j , um genügend Energieeintrag für das ganze Schweißobjekt zu gewährleisten. Daraus ergibt sich der Einstrahlkegel zur Schweißfigur j

$$C_{E,j} := \{w \in \mathbb{S}^2 : \langle w, n_j \rangle \geq \cos \gamma_j\}.$$

Im folgenden Abschnitt wird der Winkel γ_j berechnet unter der Annahme, dass die Funktion $n_j(t)$ eine konstante Funktion darstellt. Diese Vereinfachung ist gerechtfertigt, da wir wie erwähnt von kleinen Ausdehnungen ausgehen.

Bemerkung 2.5.

Obwohl die Orte eines Schweißobjektes eher planar liegen, betrachten wir Sie im folgenden als Punkte in $B_{r_j}(p_j)$. Dies führt zur Vereinfachung vieler Berechnungen.

Berechnung des Winkels γ_j

Unter der Annahme

$$n_j(t) = n_j \quad \forall t \in [0, 1]$$

werden wir in diesem Abschnitt den Winkel γ_j berechnen. Wir betrachten dazu die folgende Abbildung:

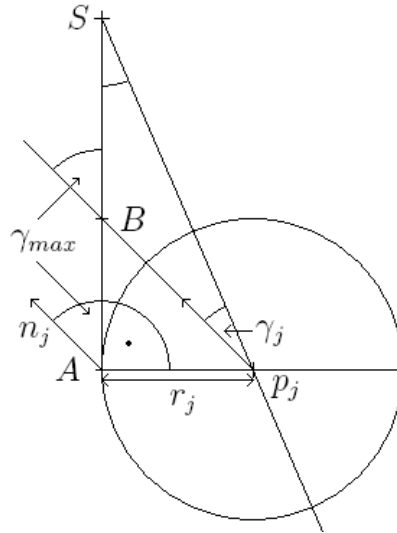


Abbildung 7: Skizze zur Berechnung von γ_j

Die virtuelle Strahlenquelle sei mit S bezeichnet. Die Punkte S, A, p_j und Vektor n_j seien koplanar, wobei Punkt A auf der Peripherie der Kugel $B_{r_j}(p_j)$ liege. Des Weiteren habe A den Einstrahlwinkel γ_{max} und die Strecke \overline{SA} sei Teil einer Tangente an $B_{r_j}(p_j)$. γ_j bezeichne den Einstrahlwinkel am Ort p_j . Weiterhin gelte:

$$\|S - p_j\| \in [l - h + r_j, l + h - r_j],$$

wobei l der virtuellen Strahlenlänge entspricht. Der Schnittpunkt der Geraden durch S und A mit der Geraden, welche durch folgende Parametrisierung

$$p_j + t \cdot n_j \quad t \in \mathbb{R}$$

gegeben ist, sei mit B bezeichnet. Aus dem Satz des Pythagoras für das Dreieck $\triangle(A, S, p_j)$ folgt

$$\|S - A\|^2 = \|S - p_j\|^2 - r_j^2.$$

Im Dreieck $\triangle(A, B, p_j)$ gilt

$$\frac{\|A - B\|}{r_j} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{max}\right) = \cot(\gamma_{max}).$$

Der Sinussatz liefert für das Dreieck mit den Eckpunkten S, p_j und B :

$$\frac{\sin(\gamma_j)}{\sin(\pi - \gamma_{max})} = \frac{\|S - B\|}{\|S - p_j\|}.$$

Unter Benutzung obiger Erkenntnisse ergibt sich

$$\sin(\gamma_j) = \frac{\sin(\gamma_{max}) \sqrt{\|S - p_j\|^2 - r_j^2} - r_j \cdot \cos(\gamma_{max})}{\|S - p_j\|}.$$

Der Winkel γ_j nimmt für $\|S - p_j\| = l - h + r_j$ sein Minimum an.

2.1.3 Tool Center Point

Die SAO-Position und -Blickrichtung werden über den so genannten Tool Center Point (TCP) beschrieben. Dies ist eine Kombination aus einem gedachten Referenzpunkt, der sich an geeigneter Stelle der SAO befindet, und der Verdrehung zum raumfesten Koordinatensystem $\Sigma = (e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)})$. Die Verdrehung wird dabei in den Eulerwinkeln (Ψ, Θ, Φ) angegeben.

Die Blickrichtung der SAO entspricht der z-Achse des verdrehten Koordinatensystems. Wir betrachten nun die Menge aller TCP's:

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}^3 \times (-\pi, \pi]^3.$$

Jeder Punkt $p \in \mathbb{T}$ ist von der Gestalt $p = (\mathbf{x}, \mathbf{o})$, wobei \mathbf{x} den Ort des TCP darstellt und \mathbf{o} dessen Orientierung.

Die Funktion $E = (E_1, E_2, E_3) : (-\pi, \pi]^3 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ bildet die Eulerwinkel auf das zugehörige gedrehte kartesische Koordinatensystem Σ' entsprechend der „ZXZ-Konvention“ ab.

$$\begin{aligned} E_1(\Psi, \Theta, \Phi) &:= \begin{pmatrix} \cos \Psi \cos \Phi - \sin \Psi \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Psi \cos \Phi + \cos \Psi \cos \Theta \sin \Phi \\ \sin \Theta \sin \Phi \end{pmatrix}, \\ E_2(\Psi, \Theta, \Phi) &:= \begin{pmatrix} -\cos \Psi \sin \Phi - \sin \Psi \cos \Theta \cos \Phi \\ \cos \Psi \cos \Theta \cos \Phi - \sin \Psi \sin \Phi \\ \sin \Theta \cos \Phi \end{pmatrix}, \\ E_3(\Psi, \Theta, \Phi) &:= \begin{pmatrix} \sin \Psi \sin \Theta \\ -\cos \Psi \sin \Theta \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es kann für die Orientierung des TCP auch direkt mit dem Koordinatensystem Σ' gearbeitet werden. In diesem Fall ergeben sich allerdings neun Koordinaten anstatt der drei Freiheitsgrade.

Bemerkung 2.6.

Zwei TCP's können das gleiche gedrehte Koordinatensystem beschreiben, obwohl sie unterschiedlich sind.

Als Beispiel dazu seien die Punkte

$$t_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right),$$

$$t_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \right)$$

genannt, die beide das Koordinatensystem

$$\Sigma' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

liefern. Dieser Effekt ist als „Gimbal Lock“ bekannt.

2.1.4 Schweißbarer Bereich C_S

Eine Fokussierung des Laserstrahls auf eine feste Länge aus dem Intervall $[f - h, f + h]$ und anschließender Auslenkung hätte einen Arbeitsbereich in Form eines Kugelsegmentes zur Folge. Alle Scanner sind aber so konzipiert, dass ihre Flächen gleicher Fokussierung Ebenen mit Normalenvektor parallel zur Blickrichtung der SAO sind. Dies wird über speziellen Linsenschliff verwirklicht. Für die Bestimmung des Arbeitsbereiches betrachten wir zunächst den *Strahlenkegel zur Blickrichtung $-n_s$* , vergleiche Abbildung 8.

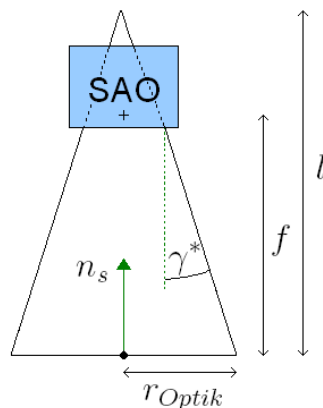


Abbildung 8: Strahlenkegel zur Blickrichtung $-n_s$

Der Strahlenkegel wird eindeutig durch die optikspezifischen Parameter Optikkreisradius r_{Optik} und Ablenkwinkel γ^* festgelegt.

Definition 2.7.

Der Strahlenkegel entspricht einem Kreiskegel mit Radius r_{Optik} und Öffnungswinkel γ^* .

Der Strahlenkegel zur Blickrichtung $v \in \mathbb{S}^2$ entspricht dem Strahlenkegel, dessen Figurenachse parallel zu v und in Richtung v geöffnet ist.

Die Höhe l des Strahlenkegels ergibt sich durch folgende Beziehung im rechtwinkligen Dreieck:

$$\tan \gamma^* = \frac{r_{Optik}}{l}.$$

Mithilfe der Position der SAO und deren Blickrichtung erhalten wir den Arbeitsbereich, welcher durch die optikspezifischen Parameter maximaler Auslenkwinkel γ^* von der Blickrichtung, Fokusslänge f , Höhenspiel h und Optikkreisradius r_{Optik} festgelegt ist.

Definition 2.8.

Wir bezeichnen den Arbeitsbereich der SAO zum Ort $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ und Blickrichtung $n \in \mathbb{S}^2$ abkürzend mit

$$\mathbb{B}(\mathbf{x}, n) := \left\{ q \in \mathbb{R}^3 : \langle q - \mathbf{x}, n \rangle \in [f - h, f + h], \left(\frac{\langle q - S, n \rangle}{\|q - S\|} \right) \geq \cos \gamma^* \right\},$$

wobei S die virtuelle Strahlenquelle ist:

$$S = \mathbf{x} - (l - f) \cdot n.$$

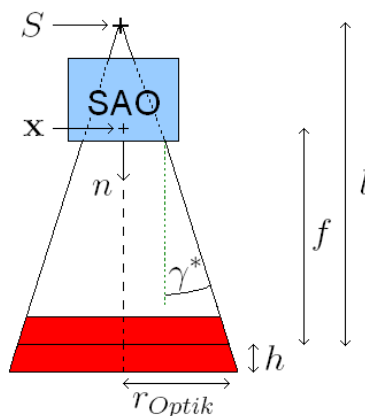


Abbildung 9: Skizze zum Arbeitsbereich

Definition 2.9.

Der schweißbare Bereich $C_S(q) \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2$ für einen TCP $q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T}$ ist definiert durch

$$C_S(q) := \left\{ (p, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^2 : p \in \mathbb{B}(\mathbf{x}, E_3(\mathbf{o})), v \in C_E \left(\frac{S(q) - p}{\|S(q) - p\|} \right) \right\},$$

wobei die virtuelle Strahlenquelle $S(q)$ für $q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T}$ sich wie folgt ergibt:

$$S(q) := \mathbf{x} - (l - f) \cdot E_3(\mathbf{o}).$$

Eine Figur (p, v) heißt schweißbar von Punkt $q \in \mathbb{T}$, wenn gilt:

$$(p, v) \in C_S(q).$$

$C_S((\mathbf{x}, \mathbf{o}))$ beinhaltet somit sämtliche Figuren (p, v) , für welche der Punkt p im Arbeitsbereich $\mathbb{B}(\mathbf{x}, E_3(\mathbf{o}))$ der SAO liegt und sich der Vektor $\frac{S(q) - p}{\|S(q) - p\|}$ im Einstrahlkegel $C_E(v)$ befindet.

Bemerkung 2.10.

Folgende Äquivalenz gilt:

$$v \in C_E(w) \Leftrightarrow w \in C_E(v).$$

Für eine weitere Darstellung von $C_S(q)$ wird folgende Definition benötigt.

Definition 2.11.

Die Menge der erreichbaren Orte $P(q)$ für $q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T}$ ist definiert durch

$$P(q) := \mathbb{B}(\mathbf{x}, E_3(\mathbf{o})).$$

Die Menge $C_S(q)$ lässt sich dann wie folgt darstellen:

$$C_S(q) = \bigcup_{p \in P(q)} \left(\bigcup_{v \in c_S(q, p)} (p, v) \right),$$

wobei die Funktion $c_S(q, \cdot) : P(q) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{S}^2)$, $p \mapsto c_S(q, p)$ durch

$$c_S(q, p) := C_E \left(\frac{S(q) - p}{\|S(q) - p\|} \right)$$

definiert ist.

2.1.5 Aufenthaltsbereich $C_A(j)$

Nachdem wir bisher betrachtet haben, welche Figuren von einem Punkt aus \mathbb{T} schweißbar sind, ist nun die umgekehrte Frage interessant: Welche Punkte aus \mathbb{T} ermöglichen die Bearbeitung der festgewählten Schweißfigur j ?

In dem *Aufenthaltsbereich* $C_A(j)$ seien alle Punkte aus \mathbb{T} enthalten, welche eine Schweißung des Schweißobjektes j erlauben. Wir wählen dazu einen Vektor w aus \mathbb{S}^2 und betrachten Abbildung 10.

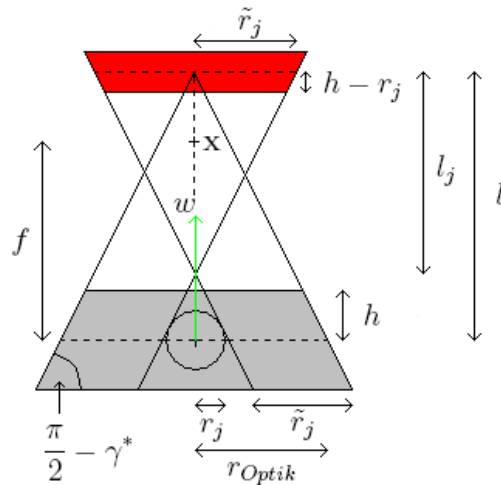


Abbildung 10: Skizze zur Entstehung von $C_A(j, w)$

Gilt für einen Punkt $q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T}$ folgendes:

$$\begin{aligned} E_3(\mathbf{o}) &= -w, \\ x &= p_j + f \cdot w, \end{aligned}$$

dann skizziert der untere eingefärbte Bereich in Abbildung 10 die Menge der erreichbaren Orte $P(q)$ (vergleiche Abschnitt 2.1.4). Wir interessieren uns für alle möglichen Positionen der virtuellen Strahlenquelle S , so dass die Kugel $B_{r_j}(p_j)$ in der Menge der erreichbaren Orte $P((S + (l - f)E_3(\mathbf{o}), \mathbf{o}))$ liegt, siehe den oberen eingefärbten Bereich in Abbildung 10. Dabei kann der Arbeitsbereich um maximal $\pm(h - r_j)$ in Richtung w und um maximal \tilde{r}_j senkrecht zum Vektor w verschoben werden. Verschieben wir den Bereich der möglichen Strahlenquellen um den Vektor $-l \cdot w$, so erhalten wir den *Aufenthaltskegelstumpf zur Richtung w* , $C_A(j, w)$. Somit ergibt sich folgende Gleichung:

$$C_A(j, w) + f \cdot w = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T}, -w = E_3(\mathbf{o}), B_{r_j}(p_j) \subset P(q)\}.$$

Für die Berechnung von $C_A(j, w)$ benötigen wir zunächst den Wert \tilde{r}_j .

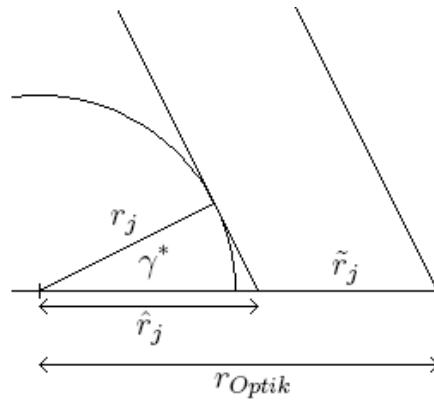


Abbildung 11: Skizze zur Berechnung \tilde{r}_j

Unter Beachtung der Abbildung 11 ergibt sich:

$$\tilde{r}_j = r_{Optik} - \hat{r}_j = r_{Optik} - \frac{r_j}{\cos \gamma^*}.$$

Zur Veranschaulichung von $C_A(j, w)$ dient Abbildung 12.

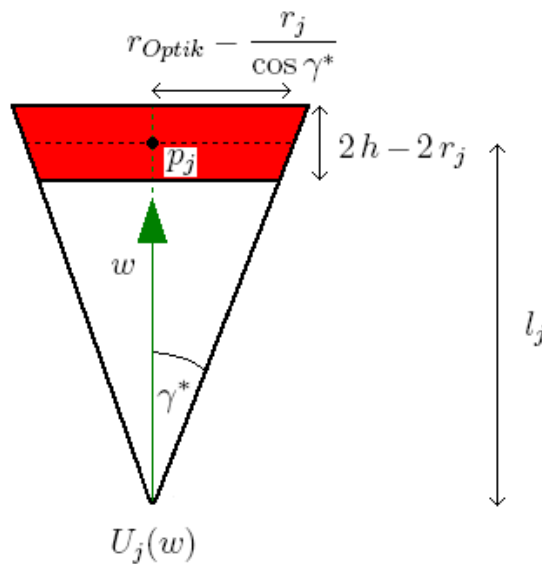


Abbildung 12: Skizze zu $C_A(j, w)$

Die mittels Abbildung 12 eingeführten Größen Kegellänge l_j und Kegelsprung $U_j(w)$ ergeben sich wie folgt:

$$l_j = \frac{\left(r_{Optik} - \frac{r_j}{\cos \gamma^*}\right)}{\tan \gamma^*},$$

$$U_j(w) = p_j - l_j \cdot w.$$

Der Bereich $C_A(j, w)$ berechnet sich folgendermaßen:

$$C_A(j, w) = \{q \in \mathbb{R}^3 : \alpha_j(w, q) \leq \gamma^* \wedge |\langle q - U_j(w), w \rangle - l_j| \leq h - r_j\},$$

wobei

$$\alpha_j(w, q) = \arccos \left(\frac{\langle q - U_j(w), w \rangle}{\|q - U_j(w)\|} \right)$$

gilt.

Der Aufenthaltsbereich $C_A(j)$ bestimmt sich mittels der Gleichung

$$C_A(j) = \left\{ q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T} : \frac{S(q) - p_j}{\|S(q) - p_j\|} \in C_{E,j}, (\mathbf{x} + f \cdot E_3(\mathbf{o})) \in C_A(j, -E_3(\mathbf{o})) \right\},$$

wobei $S(q)$ der virtuellen Strahlenquelle zu q entspricht. Eine alternative Beschreibung der Menge $C_A(j)$ ist durch folgende Formel gegeben:

$$C_A(j) = \left\{ q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T} : S(q) \in \tilde{C}_A(j), B_{r_j}(p_j) \subset P(q) \right\},$$

wobei die Menge $\tilde{C}_A(j)$ wie folgt definiert ist:

$$\tilde{C}_A(j) := \left\{ p \in \mathbb{R}^3 : \|p - p_j\| \in [l - h + r_j, l_{max}(j)], \frac{p - p_j}{\|p - p_j\|} \in C_{E,j} \right\}$$

$$l_{max}(j) := \sqrt{(l + h - r_j)^2 + \left(\frac{l + h - r_j}{\tan \gamma^*} - \hat{r}_j \right)^2}.$$

Die Menge $\tilde{C}_A(j)$ beschreibt die möglichen Orte der virtuellen Strahlenquelle zur Schweißfigur j .

2.2 Robotergeführtes Laser-Remote-Schweißen

Meist ist der Bearbeitungsraum beziehungsweise das Werkstück größer als der Arbeitsbereich, welcher durch die maximale Auslenkung des Spiegelsystems erreicht wird. Daher muss das System aus Laser und Auslenkeinheit gerichtet bewegt werden.

Das MAINE-Projekt (= Maschinenbau Initiative Next Economy) führt dieses System an einem Standard-6-Achsen-Knickarmroboter, vergleiche Abbildung 13.

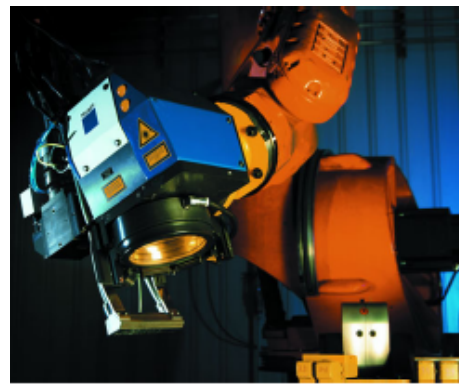


Abbildung 13: Standard-6-Achsen-Knickarmroboter mit Laserschweißeinheit

Die sechs Achsen definieren sich über die sechs Freiheitsgrade des TCP. Je drei Freiheitsgrade sind notwendig für den Ort und die Orientierung der SAO, welche häufig über die Eulerwinkel angegeben wird. Die Freiheitsgrade werden in Abbildung 14 dargestellt.

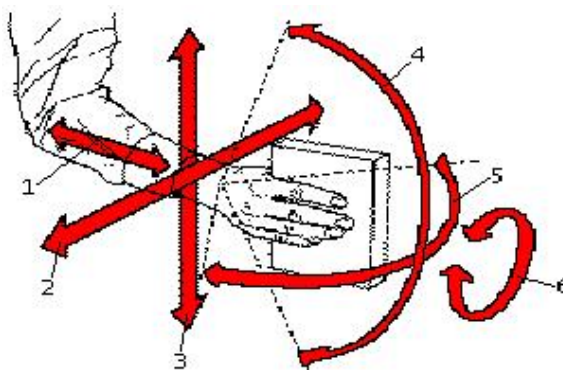


Abbildung 14: Freiheitsgrade am Beispiel eines Armes

2.2.1 Robotersteuerung

Aus mathematischer Sicht wäre es sinnvoll jede Achse des Roboters einzeln anzusteuern, denn daraus ergäbe sich die Möglichkeit der exakten Steuerung des Roboters.

Im Handbetrieb des Roboters kann zwar jede einzelne Achse bewegt werden, aber dieser zeitintensive Prozess entspricht keiner effektiven Roboterprogrammierung. Die Tools zur Programmierung und Steuerung von Robotern ermöglichen oft nur das Setzen des TCP's. Danach erfolgt eine automatische Ansteuerung der sechs Achsen, so dass der TCP laut Kalibrierung nah an dem gesetzten Wert ist. Zu beachten sind die nicht konstanten Arbeitsbedingungen wie zum Beispiel Temperaturunterschied oder Luftfeuchte in der Roboterumgebung, welche im Vergleich zur bestehenden Kalibrierung zu einer starken Diskrepanz zwischen Ist- und Soll-Zustand führen können.

Bezüglich der Bewegungssteuerung eines Roboters wird zwischen drei Arten unterschieden: der „Punkt zu Punkt Steuerung“ (PTP, Point to Point), der „Vielpunktsteuerung“ (MP, Multi Point) und der „Bahnsteuerung“ (CP, Continuous Point).

Bei der PTP-Steuerung werden einzelne Raumpunkte in einer Folge angefahren und abgespeichert. Typische Anwendungen hierfür sind das Punktschweißen und die Handhabung von Teilen (Pick and Place).

Die MP-Steuerung ist dadurch gekennzeichnet, dass taktweise den einzelnen Achsen auf der programmierten Bahn liegende Positionswerte vorgegeben werden. Anwendungsfälle für die Vielpunktsteuerung sind zum Beispiel das Spritzlackieren, das Beschichten sowie das Ausschäumen.

Bei der CP-Steuerung werden mathematisch definierte Bewegungsabläufe verfahren. Durch den Interpolator der Bewegungssteuerung erfolgt entsprechend einer vorgegebenen Bahnfunktion die Ermittlung von Zwischenwerten aus der programmierten Raumkurve und deren Übergabe an die Achsregler. Diese Art der Steuerung findet Anwendung beim Laserschweißen, Entgraten, Montieren sowie Laserschneiden.

Aufgrund der genannten Fakten ergab sich die Notwendigkeit, das Problem der Bahnoptimierung nicht achsenspezifisch zu lösen, sondern über die Menge \mathbb{T} anzugeben.

Bemerkung 2.12.

Wichtig ist zu wissen, dass der Steuerung meist mehrere Möglichkeiten zur Realisierung des gleichen TCP zur Verfügung stehen, wie die Abbildung 15 zeigt.

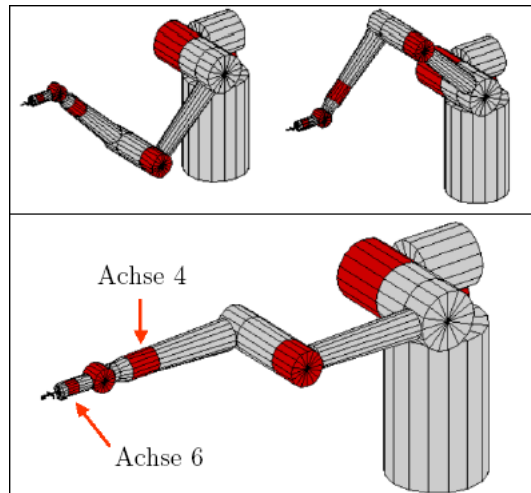


Abbildung 15: Verschiedene Realisierungen

2.2.2 Die Menge P_{Rob}

Wir betrachten die Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ der vom Roboterkopf erreichbaren Orte, welche in Abbildung 16 dargestellt ist.

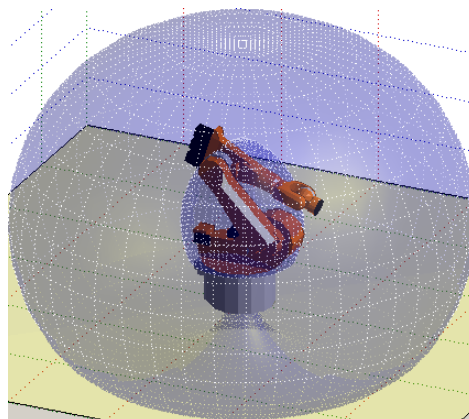


Abbildung 16: Erreichbarer Bereich eines Roboters

Nicht nur der Ort, sondern auch die Orientierung des Roboterkopfes ist von Interesse, was uns zur folgenden Definition führt.

Definition 2.13.

Die Menge der erreichbaren Roboterpositionen P_{Rob} ist eine Teilmenge von \mathbb{T} und beinhaltet die geordneten Paare (\mathbf{x}, \mathbf{o}) , wobei $\mathbf{x} \in B$ gilt und \mathbf{o} eine mögliche Orientierung des Roboterkopfes am Ort \mathbf{x} darstellt.

Jeder Roboter nimmt im Ruhe- beziehungsweise Wartezustand ein gewisse Position in P_{Rob} ein, diese nennen wir *Home-Position* und es gilt

$$R_{Home} = (\mathbf{x}^{Home}, \mathbf{o}^{Home}) = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{Home} \\ \mathbf{x}_2^{Home} \\ \mathbf{x}_3^{Home} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Für die Blickrichtung am Punkt R_{Home} folgt:

$$E_3(\mathbf{o}_{Home}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zur späteren Modellierung der Bahngenerierung (vergleiche Abschnitt 2.2.3) benötigen wir einen Abstand in der Menge P_{Rob} . Diese Menge kann als Teilmenge des \mathbb{R}^6 gesehen werden und dementsprechend wäre eine Norm des \mathbb{R}^6 nutzbar, um einen Abstand auf P_{Rob} zu definieren. Da der Roboter aber Ort und Orientierung nahezu unabhängig voneinander steuert, ist eine Teilung des Abstandes in zwei Teile sinnvoll. Dies führt uns zur folgenden Definition.

Definition 2.14.

In der Menge P_{Rob} definieren wir für die Punkte $p = (\mathbf{x}^p, \mathbf{o}^p)$, $q = (\mathbf{x}^q, \mathbf{o}^q) \in P_{Rob}$ den Abstand $\|q - p\|_{P_{Rob}}$ durch

$$\|q - p\|_{P_{Rob}} := \|\mathbf{x}^q - \mathbf{x}^p\| + \|\mathbf{o}^q - \mathbf{o}^p\|_O.$$

Zu beachten ist, dass $\|\cdot\|_{P_{Rob}}$ keine Norm ist, sondern nur ein Maß für den Abstand darstellt. Unter Beachtung der Bemerkung 2.6) stellt sich heraus, dass $\|\cdot\|_O$ keine Norm ist, es soll lediglich der Abstand zwischen zwei Orientierungen gemessen werden. Die Wahl dieses Maßes zur geeigneten mathematischen Umsetzung der technischen Gegebenheiten wird zu diesem Zeitpunkt nicht festgelegt. Eine mögliche Variante zur Wahl für $\|\cdot\|_O$ besteht in der Bewertung des Vektors mit den Winkeln zwischen den entsprechenden Achsen der gedrehten Koordinatensysteme:

$$\begin{pmatrix} \Delta x(p, q) \\ \Delta y(p, q) \\ \Delta z(p, q) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \arccos \langle E_1(\mathbf{o}^p), E_1(\mathbf{o}^q) \rangle \\ \arccos \langle E_2(\mathbf{o}^p), E_2(\mathbf{o}^q) \rangle \\ \arccos \langle E_3(\mathbf{o}^p), E_3(\mathbf{o}^q) \rangle \end{pmatrix}.$$

Eine Diskussion von Vorteilen und Nachteilen verschiedener Wahlen für das Maß $\|\cdot\|_O$ wird nicht durchgeführt werden.

2.2.3 Roboterbahn

Definition 2.15.

Eine Roboterbahn ist eine Funktion $\Gamma : [0, 1] \rightarrow P_{Rob} : t \mapsto \Gamma(t) = (\mathbf{x}_\Gamma(t), \mathbf{o}_\Gamma(t))$, mit

$$\mathbf{x}_\Gamma(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{x}_3(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{o}_\Gamma(t) := \begin{pmatrix} \Psi(t) \\ \Theta(t) \\ \Phi(t) \end{pmatrix}$$

und

$$\Gamma(0) = \Gamma(1) = R_{Home},$$

die eine geschlossene Kurve beschreibt. Statt Γ schreiben wir auch $(\mathbf{x}_\Gamma, \mathbf{o}_\Gamma)$.

Bemerkung 2.16.

Unter Berücksichtigung ökonomischer Aspekte ist es meist effektiver eine schweißaufgabenspezifische Home-Position zu definieren, um kürzere Verfahrzeiten im Vergleich zu R_{Home} zu erreichen, beziehungsweise die Bestimmung einer solchen in das Optimierungsmodell einzubeziehen. Wir benutzen im Weiteren stets R_{Home} .

Definition 2.17.

Eine Roboterbahn heißt grob zulässig zur Schweißaufgabe, wenn es zu jeder Schweißfigur j ein $t_j \in [0, 1]$ gibt, so dass von dem Punkt $\Gamma(t_j)$ die Schweißfigur j schweißbar ist.

Wir nennen eine grob zulässige Bahn zulässig zur Schweißaufgabe, falls

$$\forall j \in \{1, \dots, N\} \exists t_j \in [0, 1] : \Gamma(t_j) \in C_A(j).$$

Unter allen zulässigen Roboterbahnen gilt es nun diejenige zu ermitteln, welche aus ökonomischer und technischer Sicht die günstigste darstellt. Sie sollte möglichst kurz sein, um geringe Bearbeitungszeit zu erzielen. Zwecks Verringerung des Verschleißes der Gelenke des Roboters sind zudem folgende Eigenschaften der Roboterbahn anzustreben:

- geringe Krümmung κ ,
- geringe Torsion τ ,
- geringe Krümmungsänderung $\Delta\kappa$,
- geringe Torsionsänderung $\Delta\tau$,
- geringe Änderung der Orientierung, welche über drei Freiheitsgrade gegeben ist $(\Delta 1, \Delta 2, \Delta 3)$.

All diese Faktoren bestimmen die Güte einer Roboterbahn.

Definition 2.18.

Zur abkürzenden Schreibweise sei die Indexmenge \mathcal{H} eingeführt:

$$\mathcal{H} := \{\kappa, \tau, \Delta\kappa, \Delta\tau, \Delta 1, \Delta 2, \Delta 3\}.$$

Weiterhin sind aus technischer Sicht roboterspezifische Maximalwerte S_k , $k \in \mathcal{H}$, an die Roboterbahn vorgegeben.

3 Bahnmodellierung

In diesem Abschnitt wird das Problem der Bahnermittlung mathematisch behandelt. Die folgende Tabelle liefert einen Überblick über die verfügbaren Daten und deren zugeordnete Variablen:

$N \in \mathbb{N}$	Anzahl der gegebenen Schweißfiguren
$p_j \in \mathbb{R}^3$	j-tes Schweißzentrum $j \in \{1, \dots, N\}$
$n_j \in \mathbb{S}^2$	Oberflächennormale zum Schweißzentrum p_j
$r_{i,j} \in \mathbb{S}^2$	Richtungsvektor von Schweißfigur i zu j
$\gamma \in \mathbb{R}^N$	Vektor der Grenzwinkel
$r \in \mathbb{R}^N$	Vektor der Figurenausdehnungen
$\gamma_{max} \in \mathbb{R}$	Grenzwinkel für Energieeintrag
$\gamma^* \in \mathbb{R}$	Ablenkwinkel des Scanners
$r_{Optik} \in \mathbb{R}$	Optikradius des Scanners
$f \in \mathbb{R}$	Fokusslänge des Scanners
$h \in \mathbb{R}$	Höhenspiel des Scanners

Tabelle 1: Verfügbare Daten

3.1 Idealmodell

Dieser Abschnitt beinhaltet das mathematische Modell für die Ermittlung einer hinreichend glatten Roboterbahn $\Gamma = (\mathbf{x}_\Gamma, \mathbf{o}_\Gamma)$ (Abschnitt 2.2.3).

Eine Diskussion zu den im Folgenden verwendeten Normen $\|\cdot\|_k$ ($\|\cdot\|_{\hat{k}}$), $k \in \mathcal{H}$, ist im Abschnitt 3.3 zu finden.

Es werden Terme vorgestellt, die mathematisch die Zulässigkeit und Güte einer Roboterbahn nachbilden sollen. Als erstes betrachten wir die von der Orientierung \mathbf{o} unabhängigen Terme. Die Krümmung κ und die Torsion τ berechnen sich durch

$$\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}{\|\mathbf{x}'(t)\|^3},$$

$$\tau(t) = \frac{(\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)) \cdot \mathbf{x}'''(t)}{\|\mathbf{x}'(t) \times \mathbf{x}''(t)\|}.$$

Mittels dieser Formeln definieren wir die folgenden Terme:

$$f_{\kappa}(\Gamma) := \|\kappa\|_{\kappa}, \quad (3.1)$$

$$f_{\tau}(\Gamma) := \|\tau\|_{\tau}. \quad (3.2)$$

Schließlich benötigen wir die Länge einer Kurve:

$$f_L(\Gamma) := \int_0^1 \|\mathbf{x}'(t)\| dt. \quad (3.3)$$

Als Maß für die Torsions- sowie Krümmungsänderung setzen wir:

$$f_{\Delta\tau}(\Gamma) := \|\tau'\|_{\Delta\tau}, \quad (3.4)$$

$$f_{\Delta\kappa}(\Gamma) := \|\kappa'\|_{\Delta\kappa}. \quad (3.5)$$

Es folgen nun die vom Ort \mathbf{x} unabhängigen Terme.

Für die Änderung von Σ' definieren wir zunächst die Funktionen

$$g_j(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\arccos(\langle E_j(\mathbf{o}(t + \varepsilon)), E_j(\mathbf{o}(t)) \rangle)}{\varepsilon}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

und erhalten somit die Terme

$$f_{\Delta j}(\Gamma) := \|g_j\|_{\Delta j} \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.6)$$

Wegen (3.4) und (3.6) fordern wir $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R}^3)$ und $\mathbf{o} \in \tilde{\mathcal{C}}^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$, wobei

$$\tilde{\mathcal{C}}^1([0, 1], \mathbb{R}^3) := \{f \in \mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R}^3) : E_j(f) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^3), j \in \{1, 2, 3\}\}.$$

Somit suchen wir eine Funktion Γ aus $\mathcal{C}^{4 \times 1} := \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R}^3) \times \tilde{\mathcal{C}}^1([0, 1], \mathbb{R}^3)$. Schließlich führen wir die Parameter $\mu_k \in \mathbb{R}, \mu_k \geq 0, k \in \mathcal{H} \cup \{L\}$, ein, da die vorgestellten Terme ((3.1) bis (3.6)) gleichzeitig optimiert werden sollen. Zusammenfassend lautet das mathematische Problem zur Ermittlung einer optimalen Bahn wie folgt:

$$\min_{\Gamma \in \mathcal{C}^{4 \times 1}} \sum_{k \in \mathcal{H} \cup \{L\}} \mu_k f_k(\Gamma) \quad (3.7)$$

$$\text{s.t. : } f_k(\Gamma) \leq S_k \quad \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.7.a)$$

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} \exists t_k \in (0, 1) : (p_k, n_k) \in C_S(\Gamma(t_k)) \quad (3.7.b)$$

$$\Gamma([0, 1]) \subset P_{Rob} \quad (3.7.c)$$

$$\Gamma(0) = \Gamma(1) = R_{Home}. \quad (3.7.d)$$

Bemerkung 3.1.

Bei Vernachlässigung der Reduktion der Schweißobjekte auf die Schweißfiguren würde die Nebenbedingung (3.7.b) wie folgt lauten:

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} \exists [t_k^A, t_k^E] \in [0, 1] : \{(K_k(t), n_k(t)) : t \in [0, 1]\} \subset C_S(\Gamma([t_k^A, t_k^E])),$$

wobei $C_S(A) := \bigcup_{p \in A} C_S(p) \forall A \subset P_{Rob}$.

Bemerkung 3.2.

Für den Fall, dass keine geschlossenen Bahnen gesucht werden, entfällt Nebenbedingung (3.7.d).

3.2 Linearisiertes Modell

Um näher an ein praktisch lösbares Problem zu kommen, führen wir eine Approximation der Bahn durch. Dazu betrachten wir nicht mehr $\Gamma \in \mathcal{C}^{4 \times 1}$ mit $Im(\Gamma) \subset P_{Rob}$, sondern nur den Polygonzug auf beliebigen $n \in \mathbb{N}$ Punkten $Q_n = \{q_1, \dots, q_n\}$ in P_{Rob} mit $q_j = (\mathbf{x}_j, \mathbf{o}_j)$, welcher die optimale Bahn abstecken soll und die Punkte aus Q_n in der Reihenfolge aufsteigender Indizes besucht. Des Weiteren erfolgt hier die Verwendung der Aufenthaltsbereiche $C_A(j)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, da, wie erwähnt, die schweißbaren Bereiche die Figurenausdehnungen nicht berücksichtigen.

Im Folgenden sei $q_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{o}_0) = R_{Home}$, $J_n := \{0, \dots, n\}$ und

$$Q_n^0 := Q_n \cup \{q_0\}.$$

Aufgrund der Linearisierung müssen die Funktionen f_k , $k \in \mathcal{H}$, angepasst werden.

Die Länge eines geschlossenen Polygonzuges auf Q_n^0 bestimmt sich wie folgt:

$$\hat{f}_L(Q_n^0) = \sum_{j=0}^n \|\mathbf{x}_{\{(j+1) \bmod (n+1)\}} - \mathbf{x}_j\|.$$

Wir definieren die Vektoren $w_{\{j, (j+1) \bmod (n+1)\}}$ für $j \in J_N$ als

$$w_{\{j, (j+1) \bmod (n+1)\}} := \frac{\mathbf{x}_{\{(j+1) \bmod (n+1)\}} - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_{\{(j+1) \bmod (n+1)\}} - \mathbf{x}_j\|}.$$

Mithilfe der Vektoren $w_{\{j, (j+1) \bmod (n+1)\}}$ legen wir die Winkel α_j , $j \in J_n$, und damit die Krümmung für Polygonzüge $\hat{f}_\kappa(Q_n^0)$ fest:

$$\alpha_j := \arccos \left(-\langle w_{\{(j-1) \bmod (n+1), j\}}, w_{\{j, (j+1) \bmod (n+1)\}} \rangle \right),$$

$$\hat{f}_\kappa(Q_n^0) := \|(\pi - \alpha_0, \dots, \pi - \alpha_n)^T\|_{\hat{\kappa}}.$$

Zur Veranschaulichung dient die Abbildung 17.

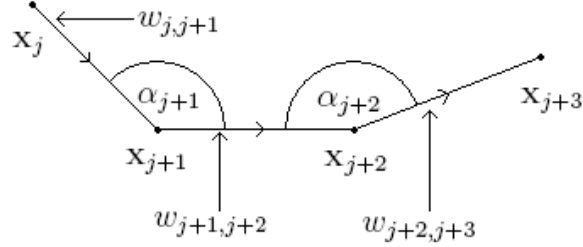


Abbildung 17: Skizze zum Polygonzug

Als Krümmungsänderung bei einem Polygonzug definieren wir

$$\hat{f}_{\Delta\kappa}(Q_n^0) := \|(\alpha_1 - \alpha_0, \dots, \alpha_0 - \alpha_n)^T\|_{\Delta\kappa}.$$

Für die Ermittlung der Torsion setzen wir die Vektoren v_j , $j \in J_n$,

$$v_j := \frac{-w_{\{(j-1) \bmod (n+1), j\}} \times w_{\{j, (j+1) \bmod (n+1)\}}}{\|w_{\{(j-1) \bmod (n+1), j\}} \times w_{\{j, (j+1) \bmod (n+1)\}}\|}.$$

Die Winkel zwischen den Vektoren v_j und $v_{\{(j+1) \bmod (n+1)\}}$, $j \in J_n$, bezeichnen wir mit β_j , also

$$\beta_j := \arccos\langle v_j, v_{\{(j+1) \bmod (n+1)\}} \rangle.$$

Infolgedessen ist es möglich, die Torsion $\hat{f}_\tau(Q_n^0)$ sowie die Torsionsänderung $\hat{f}_{\Delta\tau}(Q_n^0)$ zu definieren:

$$\begin{aligned} \hat{f}_\tau(Q_n^0) &:= \|(\beta_0, \dots, \beta_n)^T\|_{\hat{\tau}}, \\ \hat{f}_{\Delta\tau}(Q_n^0) &:= \|(\beta_1 - \beta_0, \dots, \beta_0 - \beta_n)^T\|_{\Delta\tau}. \end{aligned}$$

Für die Veränderung von Σ' setzen wir nun $\hat{f}_{\Delta k}(Q_n^0)$ für $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\hat{f}_{\Delta k}(Q_n^0) := \|(\arccos(\langle E_k(\mathbf{o}_0), E_k(\mathbf{o}_1) \rangle), \dots, \arccos(\langle E_k(\mathbf{o}_n), E_k(\mathbf{o}_0) \rangle))^T\|_{\Delta k}.$$

Das linearisierte Modell sieht dann wie folgt aus:

$$\min_{Q_n \subset P_{Rob}} \sum_{k \in \mathcal{H} \cup \{L\}} \mu_k \hat{f}_k(Q_n^0) \quad (3.8)$$

$$\text{s.t. : } \hat{f}_k(Q_n^0) \leq S_k \quad \forall k \in \mathcal{H} \quad (3.8.a)$$

$$\forall k \in \{1, \dots, N\} \exists j : q_j \in C_A(k). \quad (3.8.b)$$

Bemerkung 3.3.

Wird nur Wert auf einen Polygonzug auf der Menge Q_n anstatt des geschlossenen Polygonzuges auf Q_n^0 gelegt, dann sind die zu optimierenden Faktoren wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\hat{f}_L(Q_N) &:= \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\|, \\ \hat{f}_\kappa(Q_n) &:= \|(\pi - \alpha_2, \dots, \pi - \alpha_{n-1})^T\|_{\hat{\kappa}}, \\ \hat{f}_\tau(Q_n) &:= \|(\beta_2, \dots, \beta_{n-2})^T\|_{\hat{\tau}}, \\ \hat{f}_{\Delta\tau}(Q_n) &:= \|(\beta_3 - \beta_2, \dots, \beta_{n-2} - \beta_{n-3})^T\|_{\hat{\Delta\tau}}, \\ \hat{f}_{\Delta k}(Q_n) &:= \|(\arccos(\langle E_k(\mathbf{o}_1), E_k(\mathbf{o}_2) \rangle), \dots, \arccos(\langle E_k(\mathbf{o}_{n-1}), E_k(\mathbf{o}_n) \rangle))^T\|_{\hat{\Delta k}}.\end{aligned}$$

3.3 Normen

Bei den Modellen aus den Abschnitten 3.1 und 3.2 wurden die verwendeten Normen absichtlich allgemein gehalten, da der exakte Zusammenhang zwischen Ökonomie und mathematischem Maß nicht bekannt ist. In diesem Abschnitt sollen dazu zwei Normen diskutiert werden, die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ und die \mathcal{L}^2 -Norm $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2}$.

3.3.1 Maximumsnorm

Für eine Funktion $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, $X \subset \mathbb{R}^n$, sei die Norm $\|\cdot\|_\infty$ wie folgt definiert:

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|.$$

Es gilt für einen Vektor $w \in \mathbb{R}^m$:

$$\|w\|_\infty := \max_{i \in \{1, \dots, m\}} |w_i|.$$

Diese Norm beinhaltet keine Aussagen über die Häufigkeit des Auftretens des Maximalwertes, daher besteht die Gefahr des vielfachen Vorkommens dieses Wertes, was in der praktischen Anwendung zu erhöhtem Verschleiß des Roboters führen könnte.

3.3.2 \mathcal{L}^2 - Norm

Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$, $X \subset \mathbb{R}^n$, definieren wir

$$\|f\|_{\mathcal{L}^2}^2 := \int_X |f(x)|^2 dx.$$

Wir setzen für einen Vektor $w \in \mathbb{R}^m$:

$$\|w\|_{\mathcal{L}^2}^2 := \sum_{i=1}^m |w_i|^2.$$

Im Vergleich zur Maximumsnorm kann der Maximalwert größer ausfallen, jedoch sorgt die \mathcal{L}^2 -Norm bei Minimierungsproblemen für insgesamt ausgeglichene Werte. Daher scheint es aus ökonomischer Sicht sinnvoll, die \mathcal{L}^2 -Norm der Maximumsnorm vorzuziehen.

4 Figurengelbundenenes Modell

Bei gegebener Reihenfolge der Schweißfiguren stehen Algorithmen zur Verfügung, die eine günstige Bahn zu dieser Reihenfolge liefern. Die Problematik besteht somit in der Bestimmung einer günstigen Reihenfolge für eine möglichst optimale Bahn. Wir verwenden dazu Indikatoren, die nur von den Schweißfiguren selbst abhängen.

Es erweist sich als sinnvoll, eine Figur zur Home-Position zu definieren, da wir geschlossene Bahnen betrachten wollen.

Definition 4.1.

Die zur Home-Position gehörende Figur

$$(p_0, n_0) = \left(\mathbf{x}_{Home} - f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bezeichnen wir mit Schweißfigur 0.

4.1 Einführung der Indikatoren

Wir wollen Bahnen und deren Güte aus der Geometrie der Schweißfiguren schätzen. Dazu bieten sich folgende drei Indikatoren aus technischer Sicht an:

Der erste Indikator ist der reale Abstand der Schweißzentren, kurz Ind_R :

$$Ind_R(i, j) := \|p_i - p_j\|.$$

Der Winkel zwischen den Oberflächennormalen der betrachteten Figuren, kurz Ind_W , stellt den zweiten Indikator dar:

$$Ind_W(i, j) := \arccos\langle n_i, n_j \rangle.$$

Der dritte Indikator berechnet sich aus den Winkeln zwischen den Oberflächennormalen und entsprechenden Verbindungsvektoren, kurz Ind_N :

$$Ind_N(i, j) := \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\langle n_i, r_{i,j} \rangle\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \arccos\langle n_j, r_{j,i} \rangle\right)^2},$$

wobei $r_{i,j} := \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}$ gilt.

Hintergrund für die Wahl dieser Indikatoren ist die Tatsache, dass sich bei zwei Schweißfiguren mit geringen Indikatorwerten die Aufenthaltsbereiche stark überschneiden und dementsprechend kurz hintereinander schweißbar sind, da dann Ortsnähe der Schweißzentren und nahezu gleich gerichtete Oberflächennormalen vorliegen.

Indikatoranpassung bezüglich Höhengspiel

Die drei Indikatoren dienen der Schätzung der Güte einer optimalen Bahn, sie beinhalten aber noch nicht alle technischen Möglichkeiten und Forderungen. In diesem Abschnitt soll die Einbeziehung des Höhengspiels h behandelt werden.

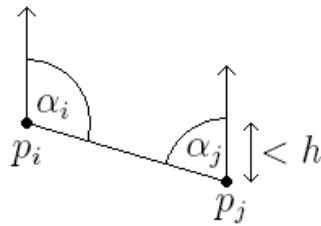


Abbildung 18: Skizze zum Indikator Ind_N

Motivation für die Anpassung bezüglich des Höhengspiels ergibt sich aus Abbildung 18; die abgebildeten Schweißfiguren sind zeitnah schweißbar, obwohl der Indikator Ind_N einen von Null verschiedenen Wert hat. Bisher ergab sich $Ind_N(i, j)$ aus den tatsächlichen Winkeln $\alpha_i = \arccos\langle r_{i,j}, n_i \rangle$ und $\alpha_j = \arccos\langle r_{j,i}, n_j \rangle$. Im Zuge der Anpassung sollen diese Winkel innerhalb des Höhengspiels h optimiert werden.

Zur Veranschaulichung der Indikatoranpassung dient die folgende Abbildung.

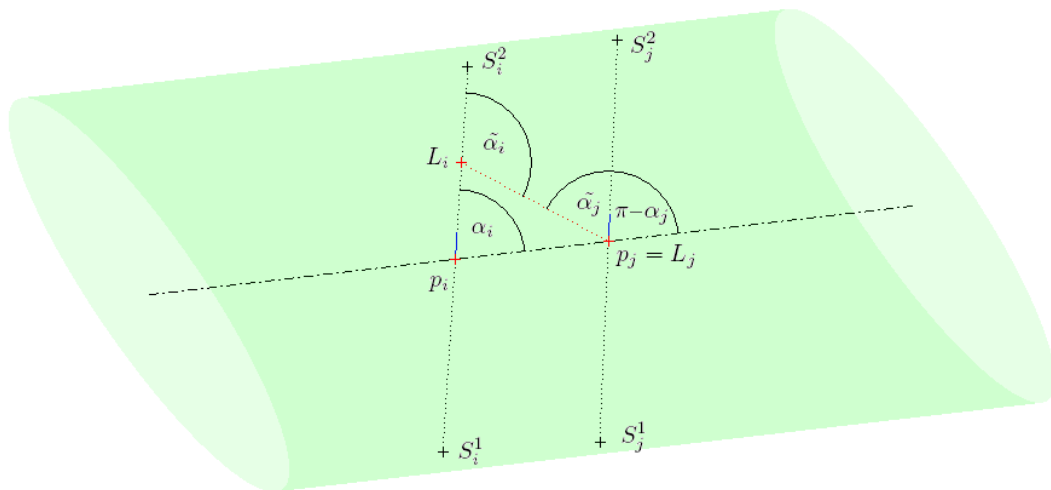


Abbildung 19: Beispiel zur Indikatoranpassung bezüglich des Höhengspiels

Wir betrachten dazu den Zylinder Z_{ij} um die Gerade durch die Punkte p_i und p_j mit Radius h und die beiden Geraden g_i und g_j , welche durch die folgenden parametrisierten Darstellung gegeben sind:

$$\begin{aligned} g_i(s) &:= p_i + s \cdot n_i, \\ g_j(t) &:= p_j + t \cdot n_j. \end{aligned}$$

Die Schnittpunkte der Geraden g_i mit Zylinder Z_{ij} werden mit S_i^1 und S_i^2 bezeichnet. Analog erhalten wir die Punkte S_j^1 und S_j^2 als Schnittpunkte des Zylinders Z_{ij} mit der Geraden g_j , vergleiche dazu Abbildung 19. Nun betrachten wir die beiden Lotfußpunkte L_i und L_j der im allgemeinen Fall windschiefen Geraden g_i und g_j . Im Fall paralleler Geraden sind diese nicht eindeutig, daher betrachten wir die Lotgerade durch den Mittelpunkt der Strecke $\overline{p_i p_j}$. Liegt der Punkt L_i außerhalb des Zylinders Z_{ij} , dann verwenden wir anstatt des Punktes L_i den Punkt aus der Menge $\{S_i^1, S_i^2\}$, welcher L_i am nächsten ist. Analoges gelte für L_j . Die tatsächlich gewählten Punkte nennen wir P_i und P_j , dann ergeben sich die gesuchten Winkel aus folgender Berechnung:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i &= \arccos \frac{\langle n_i, P_i - P_j \rangle}{\|P_i - P_j\|}, \\ \tilde{\alpha}_j &= \arccos \frac{\langle n_j, P_j - P_i \rangle}{\|P_j - P_i\|}. \end{aligned}$$

Gilt $P_i = L_i$, so hat der Winkel $\tilde{\alpha}_i$ den Wert $\frac{\pi}{2}$. Der angepasste Indikator Ind_N ist dann folgendermaßen definiert:

$$Ind_N := \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\alpha}_i\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\alpha}_j\right)^2}.$$

Bemerkung 4.2.

Ein Algorithmus zur Indikatorenanpassung bezüglich des Höhenspiels wurde implementiert, woher auch Abbildung 19 resultiert. Es ist dabei Zufall, dass im berechneten Beispiel $p_j = L_j$ gilt. Siehe dazu Abschnitt A.1.

4.2 Modell unter Verwendung der Indikatoren

Für das figurengebundene Modell sei S_N die Menge der Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, N\}$. Die Funktion G weise jeder Reihenfolge der Form $(0, \sigma(1), \dots, \sigma(N), 0)$ für $\sigma \in S_N$ die Güte der zugehörigen günstigen Bahn zu, wobei ausschließlich die Indikatoren verwendet werden.

Somit lautet unser Modell wie folgt:

$$\underset{\sigma \in S_N}{\operatorname{Argmin}} G((0, \sigma(1), \dots, \sigma(N), 0)). \quad (4.1)$$

Bemerkung 4.3.

Eine Funktion G , deren Wert exakt der Güte einer resultierenden Bahn zur gewählten Reihenfolge entspricht, ist nicht bekannt. Somit besteht die Notwendigkeit, verschiedene Kombinationsmöglichkeiten der Indikatoren zu untersuchen. Diese Thematik wird in Abschnitt 4.3 behandelt.

4.3 Lösungsansatz mittels TSP

Falls sich die Aufenthaltsbereiche der Schweißfiguren (vergleiche Abschnitt 2.1.5) nicht überschneiden und der Abstand viel größer als das Maximum der Ausdehnungen ist, lässt sich das Bestimmen einer günstigen Reihenfolge der Schweißfiguren sehr gut durch ein TSP modellieren (nähere Informationen zum TSP siehe Abschnitt 7). Je mehr sich die Bereiche annähern beziehungsweise überschneiden, desto weniger entspricht dies dem TSP, bis im Grenzfall mit einem Arbeitsbereich alle Schweißfiguren überdeckt sind.

In diesem Abschnitt soll das figurengebundene Modell als TSP untersucht werden.

Für das TSP betrachten wir den vollständigen Graph $K_{N+1} = (V_{N+1}, E_{N+1})$ auf $N + 1$ Knoten. Die Knotenmenge V_{N+1} sei

$$V_{N+1} := \{0, 1, \dots, N\},$$

wobei Knoten i für Schweißfigur i steht. Die benötigten Kosten c_{ij} werden durch einen noch zu bestimmenden Abstand $d_{TSP}(i, j)$ zwischen den Schweißfiguren i und j definiert.

Wir betrachten in diesem Abschnitt folgendes Problem:

$$\min \sum_{ij \in E_{N+1}} d_{TSP}(i, j) x_{ij} \quad (4.2)$$

$$\underline{s.t.} : x \text{ bildet eine Tour auf } K_{N+1}. \quad (4.2.a)$$

Die genauen Nebenbedingungen für (4.2.a) finden wir in Abschnitt 7.

4.3.1 Abstandsmodellierungen

Für die Bestimmung des Abstandes d_{TSP} stehen in der Geometrie der Schweißfiguren die drei Indikatoren Ind_R , Ind_W und Ind_N zur Verfügung (vergleiche Abschnitt 4.1). In den folgenden Abschnitten werden verschiedene Varianten zur Bestimmung eines Abstandes für das TSP vorgestellt. Eine Auswertung der Ansätze erfolgt in Abschnitt 4.3.2.

4.3.1.A Naiver Ansatz

Der naive Ansatz besteht in der Ermittlung des Abstandes $d_{TSP}(i, j)$ nur aus den Indikatoren der Schweißfiguren i, j . Dazu setzen wir:

$$f_1(i, j) = \sum_{k \in \Omega} f_k(Ind_k(i, j)), \text{ wobei } \Omega = \{R, W, N\}.$$

Die Funktionen f_k , $k \in \Omega$, sind beliebig gewählte streng monoton wachsende Funktionen, da sich mit Vergrößern eines Indikators $Ind_k(i, j)$ auch der Abstand $d_{TSP}(i, j)$ erhöhen muss.

Es gelte $f_k(0) = 0$, da aus $d_{TSP}(i, j) = 0$ stets die Gleichheit der Schweißfiguren folgen soll.

4.3.1.B Pfad-Ansatz

Für einen weiteren Ansatz zur Abstandsmodellierung $d_{TSP}(i, j)$ werden nicht nur die Schweißfiguren i und j ($i \neq j$), sondern weitere l verschiedene Schweißfiguren aus $\mathbb{F} \cup \{(p_0, n_0)\} \setminus \{(p_i, n_i), (p_j, n_j)\}$ betrachtet. Die Länge des entstehenden Pfades sei die Maßzahl für den Abstand $d_{TSP}(i, j)$:

$$f_2(i, j, l) = \sum_{m=1}^{l+1} \left(\sum_{k \in \Omega} f_k(Ind_k(i_m, i_{m+1})) \right) = \sum_{m=1}^{l+1} f_1(i_m, i_{m+1}),$$

wobei $i_1 = i$ und $i_2 = j$ gilt und der zugehörige Pfad P folgende Gestalt hat:

$$P_l = \{(p_{i_k} p_{i_{k+1}}) : k \in \{1, \dots, l+1\} \wedge p_{i_k} \text{ paarweise disjunkt}\}.$$

Dieser Ansatz soll einer besseren Schätzung der Bahn dienen. Im Folgenden werden zwei Wahlen für die Schweißfiguren (p_{i_m}, n_{i_m}) , $m \in \{3, \dots, l+2\}$, vorgestellt.

Wir gehen von der Verfügbarkeit der Daten $f_1(i, j) \forall i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$ aus.

Minimaler Nachfolgepfad

Wir wählen l weitere Schweißfiguren so, dass ein Pfad P_{min} minimaler Länge entsteht. Unter der Annahme, wir hätten $2 \leq k < l + 2$ Schweißfiguren zur Verfügung, bestimmen wir die folgende Menge:

$$M := \underset{m \in \{0,1,\dots,N\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\}}{\operatorname{Argmin}} (f_1(i_k, m)).$$

Sei m der kleinste Index aus M . Dann wählen wir für die Schweißfigur i_{k+1} die Schweißfigur m und inkrementieren k . Wir wiederholen dies, bis uns $l + 2$ Schweißfiguren zur Verfügung stehen.

Der Pfad P_{min} ergibt sich wie folgt:

$$P_{min} := \{(p_{i_k} p_{i_{k+1}}) : k \in \{1, \dots, l + 1\}\}.$$

Minimaler Abstand zum Schwerpunkt

Für diese Idee werden zwei Mengen U und W benötigt. Die Menge mit den Indizes der ausgewählten Schweißfiguren W beinhalte zu Beginn i und j und die Menge U die restlichen, das heißt, $U = \{0, 1, \dots, N\} \setminus W$.

W habe nun die Mächtigkeit $k \in \{2, \dots, l + 1\}$. Wir fügen zu W ein Element aus U hinzu, wenn die Summe der Abstände zu den Elementen aus W minimal unter allen Elementen aus U ist.

Zur Erläuterung betrachten wir die folgende Menge:

$$M := \underset{m \in U}{\operatorname{Argmin}} \sum_{t \in W} (f_1(t, m)).$$

Wir wählen nun den kleinsten Index aus M und fügen diesen der Menge W hinzu und löschen ihn aus U . Das Verfahren wird solange fortgeführt, bis die Mächtigkeit der Menge W $l + 2$ beträgt.

Zur Bestimmung der Länge des Pfades P_S benötigen wir die Reihenfolge, in welcher die $l + 2$ Schweißfiguren im Pfad erscheinen. Diese wird wie folgt ermittelt:

Es wird ein Pfad kürzester Länge erzeugt, dessen Mittelpunkt euklidisch nah am Schwerpunkt

$$\frac{1}{l + 2} \sum_{t=1}^{l+2} \|p_{i_t}\|$$

ist.

4.3.1.C Cluster-Ansatz

Ein neuer Ansatz ergibt sich aus der Idee, Cluster von Schweißfiguren zu betrachten.

3-Figuren-Cluster

Wie aus der Bezeichnung hervorgeht, werden hier Cluster aus drei Schweißfiguren untersucht.

Liegen im Entartungsfall die Schweißzentren auf einer Geraden, lässt sich bei gleicher Ausrichtung der zugehörigen Oberflächennormalen leicht eine Reihenfolge angeben.

Es stellt sich die Frage nach der Bewertung anderer Konfigurationen. Ansätze dazu liegen zum Beispiel in der Betrachtung des minimalen Durchmessers der Kugel, die alle drei Schweißzentren enthält, oder anderer geometrischer Eigenschaften der Konstellation dreier Schweißzentren. Doch welche geometrischen Indikatoren technisch gesehen ein 3-Figuren-Cluster gut bewerten, ist aufgrund vieler technischer Aspekte schwer fassbar. Eine mögliche Bewertungsvariante wird im Folgenden vorgestellt.

Idee zum 3-Figuren-Cluster

Wir betrachten für jeweils zwei Schweißfiguren i, j mögliche optimale Bahnen, so dass die Schweißfiguren i, j, k ($k \in \{0, 1, \dots, N\} \setminus \{i, j\}$) zeitnah geschweißt werden können, und der Wert der Kürzesten unter diesen sei der Wert für $d_{TSP}(i, j)$.

k-Figuren-Cluster

Eine Erweiterung des 3-Figuren-Clusters besteht in der vorausschauenden und zurückblickenden Bahnschätzung. Dabei können Cluster aus mehr als drei Schweißfiguren betrachtet werden. Hierbei ergibt sich erneut das Problem der Bewertung der entstehenden Cluster.

4.3.2 Auswertung des Lösungsansatzes mittels TSP

Hauptproblem des Modellierungsansatzes mittels TSP liegt darin, dass entscheidende Gütekriterien einer Bahn wie Torsion und Krümmung die Kenntnis einer Abfolge von mindestens drei Punkten verlangen. Daher erfolgt mit diesem Ansatz keine gute Schätzung der Güte einer resultierenden Bahn.

Es wurden verschiedene Ansätze zur Abstandsmodellierung betrachtet, siehe Abschnitt 4.3.1. Deren weitere Diskussion erweist sich als überflüssig, da folgender Satz 4.5 zur Verwerfung des Lösungsansatzes mittels TSP führte. Für eben genannten Satz werden noch einige Bezeichnungen benötigt.

Wir nennen die ermittelte günstige Bahn zur optimalen TSP-Reihenfolge beim linearisierten Modell *optimaler TSP-Weg* (W_{TSP}) und $L(W_{TSP})$ sei die Länge dieser Bahn. Des Weiteren sei $L(OL)$ die Länge der Optimallösung OL des Idealmodells, vergleiche Abschnitt 3.1.

Bemerkung 4.4.

In diesem Abschnitt geht es nicht wie bisher um die kürzeste Tour in dem Graphen $K_{N+1} = (V_{N+1}, E_{N+1})$, sondern um den kürzesten Hamilton-Pfad auf $V_{N+1} \setminus \{0\}$, das heißt, die Kanten zum Knoten 0 entfallen.

Entsprechend seien die Modelle aus Abschnitt 3 angepasst, vergleiche dazu die Bemerkungen 3.2 und 3.3.

Satz 4.5.

Unter Verwendung der Indikatoren aus Abschnitt 4.1 zur Abstandsermittlung für das TSP kann der optimale TSP-Weg gegenüber der Optimallösung beliebig viel länger werden, das heißt, es existiert keine Konstante c , so dass gilt:

$$L(W_{TSP}) \leq c \cdot L(OL).$$

Beweis.

Wir betrachten in \mathbb{R}^3 das Rechteck $\mathcal{R} := [0, L] \times [0, 2 \cdot r_{Optik}] \times \{0\}$ mit

$$L := 2 \cdot r_{Optik} \cdot k, \quad k > 1. \tag{4.3}$$

Die Schweißzentren seien die Gitterpunkte des regelmäßigen Gitters auf \mathcal{R} mit m_s Spalten und m_z Zeilen, siehe Abbildung 20.

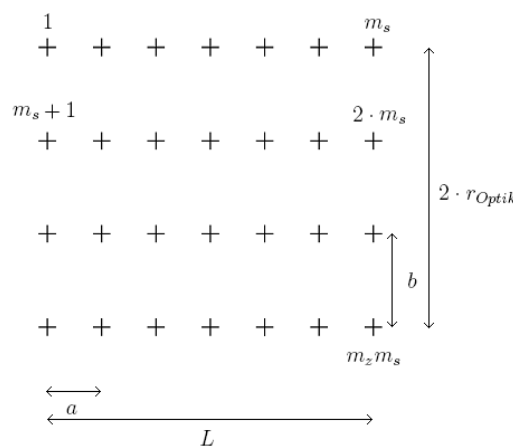


Abbildung 20: Skizze zum Gitter auf dem Rechteck \mathcal{R}

Für die zugehörigen Oberflächennormalen gelte

$$n_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall i \in \{1, \dots, m_s m_z\}.$$

Die in Abbildung 20 auftretenden Abstände a und b ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned} a &:= \frac{L}{m_s - 1}, \\ b &:= \frac{2 \cdot r_{Optik}}{m_z - 1}. \end{aligned}$$

Wir fordern $a < b$, daher folgt mit (4.3) für die Variablen m_s und m_z folgender Zusammenhang:

$$k(m_z - 1) + 1 < m_s. \quad (4.4)$$

Um jeden Gitterpunkt zu besuchen, gibt es im Wesentlichen zwei Wege. Der Erste ist der Weg W_z entlang der Zeilen des Gitters und der zweite Weg W_s führt entlang der Spalten. Die Reihenfolge der besuchten Gitterpunkte des Weges W_s bezeichnen wir mit π_s , analog definieren wir π_z für Weg W_z . Wir bestimmen die Längen der Wege und bezeichnen mit $L(W)$ die Länge eines Weges W .

$$\begin{aligned} L(W_z) &= m_z(m_s - 1)a + (m_z - 1)b \\ &= m_z \cdot L + 2 \cdot r_{Optik} \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \frac{m_z k + 1}{k} L, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(W_s) &= (m_s - 1)a + m_s(m_z - 1)b \\ &= L + 2 \cdot m_s \cdot r_{Optik} \\ &\stackrel{(4.3)}{=} \frac{k + m_s}{k} L. \end{aligned}$$

Die folgende Rechnung zeigt, dass der Weg W_s länger als Weg W_z ist:

$$\begin{aligned} L(W_s) - L(W_z) &= \frac{L}{k} (m_s + k - (m_z k + 1)) \\ &\stackrel{(4.4)}{>} \frac{L}{k} (k(m_z - 1) + 1 + k - (m_z k + 1)) = 0. \end{aligned}$$

Für jegliche monotone Modellierung des TSP-Abstandes mittels der Indikatoren aus Abschnitt 4.1 wird stets der Weg W_s länger sein als W_z , da

$$Ind_N(i, j) = Ind_W(i, j) = 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m_s m_z\}$$

gilt und somit nur eine Abhängigkeit vom realen Abstand besteht. Daher wird jeder TSP-Solver den Weg entlang der Zeilen dem entlang der Spalten vorziehen.

Wir werden im Weiteren zeigen, dass die Permutation π_s eine günstige Bahn liefert. Dafür treffen wir folgende Annahmen, um die Rechnung zu erleichtern:

- Ausdehnung $r_i = 0 \Rightarrow \gamma_i = \gamma_{max} \quad \forall i \in \{1, \dots, m_s m_z\}$,
- $\gamma^* = \gamma_{max}$.

Eine zulässige Roboterbahn bezüglich des Idealmodells bei dieser Konfiguration der Schweißobjekte und unter den getroffenen Annahmen wird durch folgende Gleichung charakterisiert (beachte Bemerkung 4.4):

$$\Gamma(t) = \left(\begin{pmatrix} L \cdot t \\ r_{Optik} \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und es gilt $f_k(\Gamma) = 0$ für alle k aus \mathcal{H} und $f_L(\Gamma) = L$. Die Größe L stellt somit eine obere Schranke für die Länge der optimalen Lösung dar.

Wir betrachten nun das linearisierte Modell aus Abschnitt 3.2 (beachte Bemerkung 4.4). Dazu wählen wir die Menge $Q_{m_s}^s = \{q_1^s, \dots, q_{m_s}^s\}$, wobei die Punkte q_k^s wie folgt definiert sind:

$$q_k^s = \left(\begin{pmatrix} \frac{L(k-1)}{m_s-1} \\ r_{Optik} \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Es gilt für $Q_{m_s}^s$:

$$\begin{aligned} \hat{f}_h(Q_{m_s}^s) &= 0 \quad \forall h \in \mathcal{H}, \\ \hat{f}_L(Q_{m_s}^s) &= L \geq L(OL). \end{aligned}$$

Der Polygonzug auf $Q_{m_s}^s$ entspricht exakt der beschriebenen zulässigen Roboterbahn und stellt eine zulässige Lösung des linearisierten Modells zur Permutation π_s dar.

Unsere nächste Aufgabe besteht in der Berechnung einer unteren Schranke für die Länge der optimalen Bahn zur Permutation π_z .

Die kürzeste Bahn zum Schweißen einer Zeile des Gitters ist exakt

$$L - 2 \cdot r_{Optik}$$

lang. Die Reihenfolge π_z zwingt den Scanner, genau m_z Zeilen zu schweißen. Daraus ergibt sich die untere Schranke

$$m_z (L - 2 \cdot r_{Optik})$$

für die Länge der optimalen Bahn zur Permutation π_z . Sei Q_n^z die zu π_z gehörige optimale Punktmenge. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \hat{f}_L(Q_n^z) &= L(W_{TSP}) \\ &\geq m_z (L - 2 \cdot r_{Optik}) \\ &\stackrel{(4.3)}{=} m_z \cdot L \left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{m_z k - m_z}{k} L. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Angenommen es existiert eine Konstante $c \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$L(W_{TSP}) \leq c \cdot L(OL). \tag{4.6}$$

Wählen wir $k = 2$ und $m_z = 3 \cdot c$, so folgt

$$\begin{aligned} L(W_{TSP}) &\stackrel{(4.5)}{\geq} \frac{3}{2} \cdot c \cdot L(OL) \\ &> c \cdot L(OL) \\ &\stackrel{(4.6)}{\geq} L(W_{TSP}). \end{aligned}$$

Dies stellt einen Widerspruch dar und daher kann Formel (4.6) nicht gelten. \square

Bemerkung 4.6.

Die Schweißfigurenkonfiguration aus dem Beweis für Satz 4.5 ist eine technisch relevante Konfiguration. Daher wurde der TSP-Ansatz in der Geometrie der Schweißfiguren verworfen.

4.4 Lösungsansatz über k -Tupel von Schweißfiguren

Für eine genauere Schätzung von Gütekriterien einer Bahn sollen hier Abfolgen von k , $k \in \mathbb{N}$, Schweißfiguren betrachtet werden.

Definition 4.7.

Ein k -Tupel $I = (i_1, \dots, i_k)$ nennen wir gültig, wenn es aus paarweise verschiedenen Indizes $i_l \in \{0, \dots, N\}$, $l \in \{1, \dots, k\}$, besteht. Die Menge der gültigen k -Tupel sei mit T_k abgekürzt. Es heißt $J \in T_k$ passend zu $I \in T_k$, wenn es eine Konstante c , $c \in \{2, \dots, k\}$, gibt, so dass $j_l = i_{k-c+l}$ für l aus der Menge $\{1, \dots, c\}$ gilt. Für I und J definieren wir die Operation Vereinigung, $I \curlywedge J$, durch

$$I \curlywedge J := (i_1, \dots, i_k, j_{c+1}, \dots, j_k)$$

Wir nennen eine endliche Folge $\{I_1, \dots, I_n\}$ aus gültigen k -Tupeln passend, falls I_{j+1} passend zu I_j für $j \in \{1, \dots, n-1\}$ und geschlossen, falls I_1 passend zu I_n ist.

Es gibt insgesamt $|T_k| = \frac{n!}{(n-k)!}$ gültige k -Tupel.

Ziel ist das Ermitteln von passenden, geschlossen, endlichen Folgen von gültigen k -Tupeln $\{I_1, \dots, I_n\}$, so dass

$$I_1 \curlywedge I_2 \curlywedge \dots \curlywedge I_{n-1} \curlywedge I_n = (0, \sigma(1), \dots, \sigma(N), 0) \quad (4.7)$$

gilt, wobei σ eine Permutation auf der Menge $\{1, \dots, N\}$ verkörpert. Wir nehmen nun an, uns stünde eine Funktion G_k zur Verfügung, die jedem Element aus T_k die Güte einer günstigen Bahn zu dieser Reihenfolge, beruhend auf den Indikatoren, zuweist. Dann suchen wir die Folge, welche (4.7) erfüllt und den Wert

$$\sum_{i=1}^n G_k(I_i)$$

minimiert. Dieses Problem stellt sich äquivalent zu (4.1) dar.

Vorteile dieses Ansatzes gegenüber dem TSP Ansatz liegen in der besseren Möglichkeit zum Schätzen der Gütekriterien. Wiederum ist die exakte Schätzung nicht bekannt, so dass die beste Möglichkeit anhand empirischer Analysen ermittelt werden müsste.

4.5 Lösungsansatz durch Bilden von Gruppen

Dieser Ansatz beruht auf dem Gedanken, dass Schweißfiguren anhand ihrer Indikatorenwerte in Gruppen eingeteilt werden. Die folgende Überlegung legt diese Gruppeneinteilung nahe:

Bei sich stark unterscheidenden Oberflächennormalen n_i, n_j oder großem Abstand der Schweißzentren p_i, p_j ist eine zeitnahe Schweißung der Figuren i und j unwahrscheinlich. Daher muss bei der Ermittlung eines Nachfolgers von Schweißfigur i die Schweißfigur j nicht betrachtet werden. Daraus ergibt sich eine Unterscheidung zwischen möglichen und unmöglichen Nachfolgern. Eine Gruppeneinteilung der Schweißfiguren könnte anhand der Indikatoren Ind_N, Ind_W vorgenommen werden; dabei gehören zwei Schweißfiguren i, j in dieselbe Gruppe, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} Ind_N(i, j) &\leq \eta_N, \\ Ind_W(i, j) &\leq \eta_W. \end{aligned}$$

Dabei sind η_N, η_W festzulegende Grenzwerte. Innerhalb der erzeugten Gruppen bestimmen wir mittels Ind_R eine Reihenfolge und danach eine Reihenfolge der Gruppen.

Dieser Ansatz wird nicht weiter verfolgt, da die oben erwähnte Variante als Grenzfall des naiven Ansatzes (vergleiche Abschnitt 4.3.1.A) durch geschickte Wahl und Kombination von Funktionen mit anschließender TSP-Lösung darstellbar ist. Dazu betrachten wir für eine gewählte Funktion f_R den Wert $K := \max_{i,j \in \{0, \dots, N\}} f_R(Ind_R(i, j))$. Seien nun Funktionen f_N, f_W gegeben. Dann erhalten wir eine Gruppeneinteilung mittels TSP Ansatz durch Definition der Funktionen \tilde{f}_N, \tilde{f}_W :

$$\tilde{f}_k(x) := \begin{cases} f_k(x) & \text{für } x \leq \eta_k, \\ f_k(x) + (K + 1) & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $k \in \{N, W\}$ gilt.

5 Diskretisierungen

Unter Beachtung der bisherigen Erkenntnisse erscheint es sinnvoll, die Bahnmodelle aus Abschnitt 3 intensiver zu untersuchen. Um aus dem kontinuierlichen Problem der Bahnermittlung ein diskretes Modell zu erhalten, diskretisieren wir die Menge

$$C_A := \bigcup_{j=1}^N C_A(j) \cap P_{Rob}.$$

Die Menge $C_A(j)$ ist der Aufenthaltsbereich zur Schweißfigur j , welcher in Abschnitt 2.1.5 eingeführt wurde. Zwei verschiedene Diskretisierungen werden in den nächsten Abschnitten vorgestellt.

5.1 Diskretisierung der Aufenthaltsbereiche

Bei dieser Variante werden zuerst die Mengen $\tilde{C}_A(j)$ diskretisiert, und anschließend die möglichen Blickrichtungen.

Wir wählen dazu einen Vektor $k_1^{disk} = (k_\theta, k_\phi, k_r, k_x, k_y)^T \in \mathbb{N}^5$ beliebig.

5.1.1 Diskretisierung der Menge $\tilde{C}_A(j)$

Zunächst rufen wir uns die Definition der Menge $\tilde{C}_A(j)$ aus Abschnitt 2.1.5 in Erinnerung:

$$\tilde{C}_A(j) := \left\{ p \in \mathbb{R}^3 : \|p - p_j\| \in [l - h + r_j, l_{max}(j)], \frac{p - p_j}{\|p - p_j\|} \in C_{E,j} \right\}.$$

Wir verwenden die sphärischen Koordinaten $(\phi, \theta, r)^T$, deren Konvention mittels Abbildung 21 verdeutlicht wird.

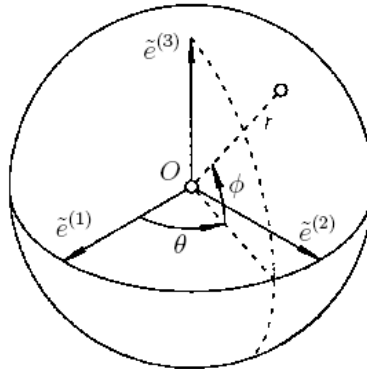


Abbildung 21: Konvention für sphärische Koordinaten

Das zugrunde liegende orthonormale Rechtssystem $(\tilde{e}^{(1)}, \tilde{e}^{(2)}, \tilde{e}^{(3)})$ sowie der Koordinatenursprung O ändern sich dabei von Schweißfigur zu Schweißfigur. Für Schweißfigur j gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{e}^{(3)} &= n_j, \\ O &= p_j, \\ \tilde{e}^{(1)} &= \text{proj}_{\tilde{e}^{(3)}}(e^{(1)}).\end{aligned}$$

Im Fall $e^{(1)} \parallel n_j$ verwenden wir $e^{(2)}$ anstatt $e^{(1)}$.

Die Menge $\tilde{C}_A(j)$ hat in diesen sphärischen Koordinaten folgende Gestalt:

$$\tilde{C}_A^{sph}(j) := \left\{ \begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \phi \in \left[\frac{\pi}{2} - \gamma_j, \frac{\pi}{2} \right], \theta \in [0, 2 \cdot \pi), r \in [l + h - r_j, l_{max}(j)] \right\}.$$

Wir teilen den Winkel γ_j in k_ϕ gleichgroße Winkel und definieren nun die Menge

$$\Phi(k_\phi) := \left\{ \frac{\pi}{2} - k \frac{\gamma_j}{k_\phi} : k \in \{0, \dots, k_\phi\} \right\}$$

für mögliche diskretisierte Werte von ϕ . Für die Kardinalität von $\Phi(k_\phi)$ gilt:

$$|\Phi(k_\phi)| = k_\phi + 1.$$

Für die Diskretisierung des sphärischen Winkels θ definieren wir mittels k_θ die Menge

$$\Theta(k_\theta) := \left\{ k \frac{2 \cdot \pi}{k_\theta} : k \in \{0, \dots, k_\theta - 1\} \right\}.$$

Offensichtlich ist die Mächtigkeit von $\Theta(k_\theta)$ wie folgt gegeben:

$$|\Theta(k_\theta)| = k_\theta.$$

Für die Abstände r setzen wir die Menge

$$R(k_r) := \left\{ l - h + r_j + k \frac{l_{max}(j) - l + h - r_j}{k_r} : k \in \{0, \dots, k_r\} \right\}.$$

Die Kardinalität der Menge $R(k_r)$ bestimmt sich durch

$$|R(k_r)| = k_r + 1.$$

Die diskretisierten Punkte in sphärischen Koordinaten sind gegeben durch

$$\hat{C}_A^{sph}(j) := \{ (\phi, \theta, r)^T \in \mathbb{R}^3 : \phi \in \Phi(k_\phi), \theta \in \Theta(k_\theta), r \in R(k_r) \}.$$

Es gibt somit insgesamt

$$|\hat{C}_A^{sph}(j)| = k_\theta (k_\phi + 1) (k_r + 1)$$

Punkte.

Wir bezeichnen mit $\hat{C}_A(j)$ die Menge der diskretisierten Punkte in kartesischen Koordinaten.

5.1.2 Diskretisierung der möglichen Blickrichtungen

Wir betrachten in diesem Abschnitt zunächst die Menge

$$\mathcal{O}(p, j) := \{\mathbf{o} \in (-\pi, \pi]^3 : B_{r_j}(p_j) \subset P((p, \mathbf{o}))\}.$$

Diese beinhaltet alle zulässigen Orientierungen. Die zugehörigen Blickrichtungen haben folgende Gestalt:

$$\mathcal{R}(p, j) := \{w \in \mathbb{S}^2 : \exists \mathbf{o} \in \mathcal{O}(p, j) : E_3(\mathbf{o}) = w\}.$$

Wir bezeichnen mit $\hat{\mathcal{R}}(p, j)$ die Menge der diskretisierten Richtungen. Es gelte dabei:

$$|\hat{\mathcal{R}}(p, j)| = k_x (k_y + 1).$$

Wie genau diese endliche Anzahl an Blickrichtungen zu wählen ist, bleibt als offenes Problem bestehen. Natürlich wäre es auch sinnvoller die Werte k_x und k_y abhängig vom betrachteten Punkt p zu wählen, jedoch wurde diese Möglichkeit nicht weiter verfolgt.

Für jeden Aufenthaltsbereich $C_A(j)$ setzen wir

$$\mathbb{D}_j = \mathbb{D}_j(k_1^{disk}) := \left\{ q = (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in \mathbb{T} : S(q) \in \hat{C}_A(j), E_3(\mathbf{o}) \in \hat{\mathcal{R}}(S(q), j) \right\}.$$

Es ergeben sich somit

$$K_1^{disk} = K_1^{disk}(k_1^{disk}) := k_\theta (k_\phi + 1) (k_r + 1) k_x (k_y + 1)$$

Punkte aus der oben beschriebenen Diskretisierung und wir führen die folgende Menge ein:

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}(k_1^{disk}) := \bigcup_{j=1}^N \mathbb{D}_j.$$

Für die Kardinalität der Mengen gilt:

$$\begin{aligned} |\mathbb{D}_j| &= K_1^{disk}, \\ |\mathbb{D}| &= N \cdot K_1^{disk}. \end{aligned}$$

5.1.3 Diskretisierungsfehler

Jede Diskretisierung weist einen Fehler gegenüber dem kontinuierlichen Problem auf. Auf den Diskretisierungsfehler der hier gewählten Diskretisierung soll nicht weiter eingegangen werden.

5.2 Diskretisierung der einschließenden Box

In diesem Abschnitt betrachten wir den kleinsten achsenparallelen 6-dimensionalen Quader Q , welcher $C_A \cup \{R_{Home}\}$ enthält. Wir bestimmen dazu die Werte a_i, b_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, aus den folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} a_j &:= \min\{\mathbf{x}_j : (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in C_A \cup \{R_{Home}\}\}, \\ a_{j+3} &:= \min\{\mathbf{o}_j : (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in C_A \cup \{R_{Home}\}\}, \\ b_j &:= \max\{\mathbf{x}_j : (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in C_A \cup \{R_{Home}\}\}, \\ b_{j+3} &:= \max\{\mathbf{o}_j : (\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in C_A \cup \{R_{Home}\}\}, \end{aligned}$$

wobei $j \in \{1, 2, 3\}$ gilt. Quader Q ist dann von folgender Gestalt

$$Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_6, b_6].$$

Bemerkung 5.1.

Anstatt alle $(\mathbf{x}, \mathbf{o}) \in C_A \cup \{R_{Home}\}$ zu betrachten, genügt es, die Punkte aus einer groben Diskretisierung von C_A zu benutzen (vergleiche Abschnitt 5.1) sowie den Punkt R_{Home} .

5.2.1 Algorithmische Bestimmung von Q

Für die Bestimmung der maximalen und minimalen Ortswerte der Menge C_A betrachten wir zunächst die Extremwerte der Menge $\tilde{C}_A(j)$. Offensichtlich liegen diese Extremwerte bezüglich einer Achse stets in der durch diese und den Vektor n_j aufgespannten Ebene. Somit ist nur der Winkel zwischen n_j und der Achse entscheidend.

Zur Veranschaulichung für die Bestimmung des Maximalwertes $e_{max}(j)$ dient Abbildung 22. Dabei sei e der normierte Vektor zur betrachteten Achse.

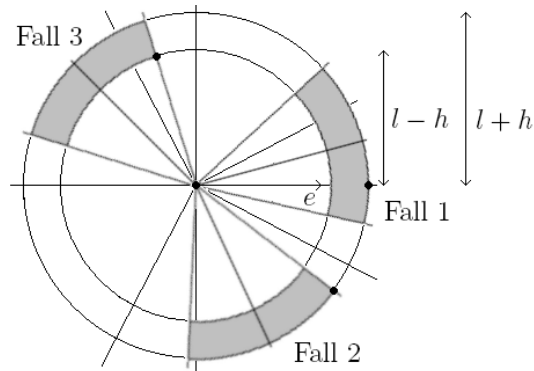


Abbildung 22: Skizze zur Bestimmung des maximalen Wertes von $\tilde{C}_A(j)$

Wir unterscheiden für den Winkel $\varphi = \arccos(\langle n_j, e \rangle)$ drei Fälle:

Fall 1: $\varphi \in [0, \gamma_j]$.

In diesem Fall ist der Maximalwert $e_{max}(j)$ durch $l + h$ gegeben, da die positive Achse zu e von der Menge $\tilde{C}_A(j)$ geschnitten wird.

Fall 2: $\varphi \in (\gamma_j, \frac{\pi}{2} + \gamma_j]$.

Liegt der Winkel φ in diesem Bereich, so folgt, dass der Maximalpunkt bezüglich e durch die Länge $l + h$ und den Winkel $\varphi - \gamma_j$ bestimmt wird. Daher ergibt sich für den Maximalwert $e_{max}(j) = (l + h) \cdot \cos(\varphi - \gamma_j)$.

Fall 3: $\varphi \in (\frac{\pi}{2} + \gamma_j, \pi]$.

Für den verbleibenden Bereich berechnet sich $e_{max}(j)$ durch $(l - h) \cdot \cos(\varphi - \gamma_j)$.

Zur Bestimmung des Minimalwertes e_{min} betrachten wir die Abbildung 23.

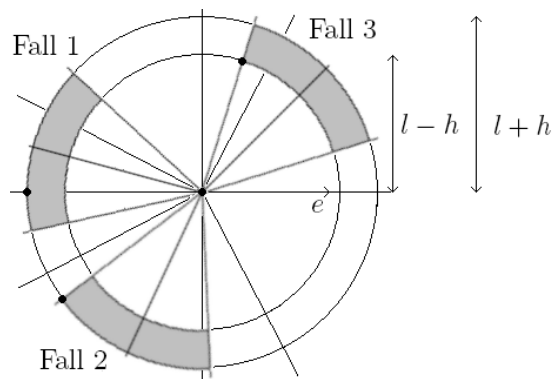


Abbildung 23: Skizze zur Bestimmung des minimalen Wertes von $\tilde{C}_A(j)$

Wir unterscheiden wiederum drei Fälle, und durch ähnliche Betrachtungen wie zum Maximalwert folgt:

$$\begin{aligned}\varphi \in [\pi - \gamma_j, \pi] &\Rightarrow e_{min}(j) = -l - h, \\ \varphi \in \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_j, \pi - \gamma_j\right] &\Rightarrow e_{min}(j) = (l + h) \cdot \cos(\varphi + \gamma_j), \\ \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2} - \gamma_j\right] &\Rightarrow e_{min}(j) = (l - h) \cdot \cos(\varphi + \gamma_j).\end{aligned}$$

Der Maximalwert e_{max} für Q bezüglich des Richtungsvektors e ergibt sich durch:

$$e_{max} = \max\{\{e_{max}(j) : j \in \{1, \dots, N\}\}, \langle \mathbf{x}_{Home}, e \rangle e\}.$$

Analog erhalten wir für den Minimalwert:

$$e_{min} = \min\{\{e_{min}(j) : j \in \{1, \dots, N\}\}, \langle \mathbf{x}_{Home}, e \rangle e\}.$$

Beruhend auf diesen Berechnungen wurde ein Algorithmus implementiert, der jeder Schweißaufgabe den entsprechenden Quader zuordnet, vergleiche A.2.

5.2.2 Diskretisierung von Q

Für die Diskretisierung von sei ein Vektor $k_2^{disk} = (k_1, \dots, k_6)^T \in \mathbb{N}^6$ fest gewählt. Der Quader Q werde in

$$K_2^{disk}(k_2^{disk}) := \prod_{i=1}^6 k_i$$

Teilquader so zerteilt, dass jeder Teilquader einem Translat des Quaders

$$Q_E(k_2^{disk}) := \left[0, \frac{b_1 - a_1}{k_1}\right] \times \dots \times \left[0, \frac{b_6 - a_6}{k_6}\right]$$

entspricht.

Die Eckpunkte der Teilquader seien unsere diskretisierten Punkte, insgesamt sind dies

$$M = M(k_2^{disk}) := \prod_{i=1}^6 (k_i + 1)$$

Punkte. Die Vereinigung dieser Punkte bezeichnen wir mit

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(k_2^{disk}) = \{q_1, \dots, q_M\}.$$

Definition 5.2.

Zwei Punkte $q_l, q_k \in \mathcal{D}$ heißen benachbart, wenn diese durch eine Kante eines Teilquaders verbunden sind.

Somit ist ein Punkt $q_l \in \mathcal{D}$ maximal zu 12 Punkten aus \mathcal{D} benachbart.

5.2.3 Diskretisierungsfehler

Wie in Abschnitt 5.1 erwähnt tritt bei einer Diskretisierung ein Fehler auf. Ein Punkt p aus $C_A \cup \{R_{Home}\}$ mit maximalen Abstand zu einem nächsten Punkt aus $\mathcal{D}(k_2^{disk})$ ist im Inneren eines Teilquaders zu suchen. Dessen Abstand zu den Ecken des Quaders beträgt

$$\left\| \left(\begin{array}{c} \frac{b_1-a_1}{2 \cdot k_1} \\ \frac{b_2-a_2}{2 \cdot k_2} \\ \frac{b_3-a_3}{2 \cdot k_3} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \frac{b_4-a_4}{2 \cdot k_4} \\ \frac{b_5-a_5}{2 \cdot k_5} \\ \frac{b_6-a_6}{2 \cdot k_6} \end{array} \right) \right\|_{P_{Rob}} .$$

Dieser Wert stellt den absoluten Diskretisierungsfehler dar.

6 Weitere Modellierungsansätze

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ansätze beruhen auf der Idee, Polygonzüge auf den Punkten aus den in Abschnitt 5 erwähnten Diskretisierungen zu berechnen, welche zulässige günstige Bahnen approximieren beziehungsweise günstige Reihenfolgen ermitteln lassen. Der Abstand der Punkte wird mittels $\|\cdot\|_{P_{Rob}}$ gemessen (vergleiche Definition 2.14).

6.1 Kombination aus Set Covering und TSP

In Anlehnung an das CSP (siehe Abschnitt 7.5) ist die folgende Modellierungsidee denkbar, wobei wir zunächst das Mengenüberdeckungsproblem definieren.

Definition 6.1.

Seien X eine gegebene Grundmenge, M eine Teilmenge der Potenzmenge zu X und $k \in \mathbb{N}$ eine Konstante.

Das Mengenüberdeckungsproblem (Set Covering) ist ein Entscheidungsproblem der Kombinatorik. Es fragt, ob es eine Teilmenge C von M mit $|C| \leq k$ gibt, so dass $\bigcup_{N \in C} N = X$ gilt.

Das Mengenüberdeckungsproblem gehört zur Liste der 21 klassischen NP-vollständigen Probleme. Die Zugehörigkeit zu dieser Klasse zeigte R. Karp im Jahre 1972, vergleiche [14].

Für die Modellierungsidee setzen wir $X = \mathbb{F} \cup \{p_0, n_0\}$ und $M = \mathcal{P}(X)$. Nun betrachten wir eine beliebige Diskretisierung D von C_A , diesbezügliche Beispiele vergleiche Abschnitt 5. Wir nennen einen Punkt $p \in D$ *Repräsentant für die Menge* $N = \{(p_{i_1}, n_{i_1}), \dots, (p_{i_m}, n_{i_m})\} \in M$, falls

$$p \in R(N, D) := \bigcap_{t=1}^m C_A(i_t) \cap D$$

gilt. Entspricht $R(N, D)$ der leeren Menge, so heißt N *unzulässig*, anderenfalls *zulässig*. Für eine festgewählte Konstante k , $k \in \{1, \dots, N + 1\}$, bestimmen wir mit zulässigen Mengen ein Set Covering für die Menge X , falls realisierbar. Dieses habe die Gestalt $\{N_1, \dots, N_k\}$. Nun besteht die Aufgabe darin, jeweils einen Repräsentanten zu den Mengen N_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, so zu wählen, dass ein TSP Solver eine kürzeste Tour auf dem zugehörigen Graphen findet. Eine genauere Wahl der Repräsentanten und weiterführende Betrachtungen zu diesem Ansatz werden wegen Zeitmangel nicht weiter diskutiert.

6.2 Ansatz zur Bestimmung einer Figurenreihenfolge

Es stehen Algorithmen zur Verfügung, die bei gegebener Reihenfolge der Schweißfiguren ein günstige Bahn liefern. Der Grundgedanke des folgenden Ansatzes besteht in der Ermittlung einer N -elementigen Punktmenge M aus einer gewählten Diskretisierung von C_A und einer Permutation auf M , aus der sich die Figurenreihenfolge ablesen lässt. In diesem Abschnitt wählen wir die erste Diskretisierung \mathbb{D} , siehe Abschnitt 5.1.

Da die Schweißaufgabe (vergleiche Abschnitt 2.1.2) darin besteht, alle N Schweißfiguren zu schweißen, wollen wir eine höchstens N -elementige Menge $M := \{q_l \in \mathbb{D}(k_1^{disk}) : l \in \{1, \dots, k\}, k \leq N, k \in \mathbb{N}\}$ so wählen, dass folgendes gilt:

$$(p_j, n_j) \in \bigcup_{l=1}^k C_S(q_l) \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}. \quad (6.1)$$

Wir wissen, dass jedes $q \in \mathbb{D}_j$ eine Schweißung der Schweißfigur j ermöglicht. Wählen wir $q_j \in \mathbb{D}_j \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}$, können wir die Bedingung (6.1) für $k = N$ erfüllen. Gilt wiederum

$$q_j \in C_A(i) \quad \text{für } j \neq i, \quad i, j \in \{1, \dots, N\},$$

so kann $|M|$ verringert werden.

Wie eine Bestimmung einer Reihenfolge der Schweißfiguren aus Menge M erfolgt, wird in Bemerkung 6.5 erwähnt.

Zur Ermittlung von M und einer Permutation auf dieser Menge betrachten wir zunächst den vollständigen Graphen $K_{|\mathbb{D}|+1} = (V_{|\mathbb{D}|+1}, E_{|\mathbb{D}|+1})$ auf $K_1^{disk} \cdot N + 1$ Punkten. Die Knotenmenge $V_{|\mathbb{D}|+1}$ sei wie folgt definiert:

$$V_{|\mathbb{D}|+1} := \{0, 1, \dots, |\mathbb{D}|\}.$$

Definition 6.2.

Wir bezeichnen die Bijektion von der Menge $\{0, 1, \dots, |\mathbb{D}|\}$ in die Menge $\mathbb{D} \cup \{R_{Home}\}$ mit F , wobei $F(0) = R_{Home}$ gelten soll.

Für den vollständigen Graphen $K_{|\mathbb{D}|+1}$ erhalten wir:

$$|E_{|\mathbb{D}|+1}| = \frac{K_1^{disk} \cdot N (K_1^{disk} \cdot N + 1)}{2}$$

Kanten und es gilt daher

$$|E_{|\mathbb{D}|+1}| \in \mathcal{O}(N^2).$$

Es ist möglich, die Anzahl der Kanten noch zu reduzieren, aber die Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$ bleibt dennoch erhalten. Da wir nur höchstens einen Punkt aus \mathbb{D}_j für die Menge M suchen, benötigen wir die Kanten innerhalb von

$$V_{|\mathbb{D}|+1}^j := \{v \in V_{|\mathbb{D}|+1} : F(v) \in \mathbb{D}_j\}$$

nicht. Wir sparen somit

$$\frac{K_1^{disk} (K_1^{disk} - 1)}{2}$$

Kanten. Löschen wir diese aus $K_{|\mathbb{D}|+1}$ für alle $j \in \{1, \dots, N\}$, erhalten wir den Graphen $G' = (V_{|\mathbb{D}|+1}, E')$, wobei

$$E' = \{uv \in E_{|\mathbb{D}|+1} : F(u) \in \mathbb{D}_j, F(v) \in \mathbb{D}_l, j \neq l\} \cup \{u(|\mathbb{D}| + 1) : u \in \{1, \dots, |\mathbb{D}|\}\}$$

gilt, und es ergibt sich:

$$|E'| = \frac{K_1^{disk} \cdot N}{2} (K_1^{disk} (N - 1) + 2).$$

Für eine weitere mögliche Reduktion der Kantenzahl werden die Begriffe aus folgender Definition benötigt.

Definition 6.3.

Die Schweißfiguren-Knotenmatrix $A \in \mathbb{R}^{N \times (|\mathbb{D}|+1)}$ ist definiert durch

$$a_{m,u} := \begin{cases} 1, & \text{falls } F(u) \in C_A(m), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen $B \in \mathbb{R}^{N \times |E'|}$ die Schweißfiguren-Kantenmatrix, wenn für die Einträge der Matrix gilt:

$$b_{m,(uv)} := \begin{cases} 1, & \text{falls } F(u) \in C_A(m) \text{ oder } F(v) \in C_A(m), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weitere Kanten könnten gelöscht werden, wenn deren inzidente Knoten in der gleichen Zeile von A stehen oder wenn die Abstände zweier Knoten eine feste Maximaldistanz übersteigen. Diese Möglichkeiten werden im Folgenden jedoch nicht betrachtet.

Als nächstes wird der Kanteninzidenzvektor $x \in \{0, 1\}^{|E'|}$ eingeführt. Für diesen gilt:

$$x_{uv} := \begin{cases} 1, & \text{falls Kante } uv \text{ benutzt wird,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mithilfe dieses Vektors ist es möglich, die Erfüllung der Schweißaufgabe mathematisch zu beschreiben:

$$Bx \geq e.$$

Der Abstand zwischen den Punkten $F(u)$ und $F(v)$ sei mit c_{uv} bezeichnet, das heißt,

$$c_{uv} := \|F(u) - F(v)\|_{P_{Rob}}.$$

Definition 6.4.

Wir nennen $G'(x) = (V_{|\mathcal{D}|+1}(x), E'(x))$ den durch den Kanteninzidenzvektor $x \in \{0, 1\}^{|E'|}$ induzierten Untergraph, wenn folgendes gilt:

$$x_{uv} = 1 \quad (uv \in E') \Leftrightarrow u, v \in V_{|\mathcal{D}|+1}(x) \\ uv \in E'(x).$$

Der Modellierungsansatz ist wie folgt formuliert:

$$\min \sum_{uv \in E'} c_{uv} x_{uv} \tag{6.2}$$

$$\text{s.t. : } Bx \geq e \tag{6.2.a}$$

$$x(\delta(v)) = 2 \quad \forall v \in V_{|\mathcal{D}|+1}(x) \cup \{0\} \tag{6.2.b}$$

$$\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 2 \quad \forall S \subset V_{|\mathcal{D}|+1}(x) \quad 2 \leq |S| \leq |V_{|\mathcal{D}|+1}(x)| - 2 \tag{6.2.c}$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall uv \in E'. \tag{6.2.d}$$

Nachteile des Modellierungsansatzes

Die Nachteile dieses Modellierungsansatzes bestehen unter anderem in der hohen Kantenanzahl sowie der Nichtberücksichtigung der in Abschnitt 3 vorgestellten Forderungen an die Bahn, wie geringe Torsion oder Krümmung.

Einige Verbesserungsmöglichkeiten zur Verringerung der Kantenanzahl wurden schon genannt, deren Untersuchungen noch wünschenswert wären.

Dieser Ansatz berücksichtigt Gütekriterien wie Krümmung und Torsion nicht, da diese Eigenschaften nicht allein über den Abstand zweier Punkte modellierbar sind. Es müssten Zusatzbedingungen eingeführt werden, welche bei gewählten Kanten die Auswahl der möglichen Nachfolgekanten anhand von Krümmung oder Torsion verringern.

Bemerkung 6.5.

Sei $x \in \mathbb{R}^{|E'|}$ der zur Lösung von Problem (6.2) gehörige Inzidenzvektor. Für die oben erwähnte Menge M gilt

$$M = F(V_{|\mathbb{D}|+1}(x)),$$

und die Permutation auf M ergibt sich aus $E'(x)$. Mithilfe der Schweißfiguren-Knotenmatrix erhalten wir dann eine Reihenfolge der Schweißfiguren. An dieser Stelle soll nicht detaillierter auf die Bestimmung der Reihenfolge der Schweißfiguren aus diesem Ansatz eingegangen werden, da dieser aufgrund der erheblichen Nachteile nicht weiter verfolgt wurde.

6.3 Ansatz zur Bahnapproximation

In diesem Ansatz wird versucht, eine günstige Bahn durch Polygonzüge auf Punkten der Diskretisierung \mathcal{D} , vergleiche Abschnitt 5.2, zu approximieren. Dazu betrachten wir den Graphen $G'' = (V_M, E'')$, welcher durch

$$\begin{aligned} V_M &:= \{1, \dots, M\}, \\ E'' &:= \{uv : u, v \in V_M, q_u \in \mathcal{D} \text{ und } q_v \in \mathcal{D} \text{ sind benachbart}\} \end{aligned}$$

definiert ist. M bezeichne dabei die Anzahl der diskretisierten Punkte. Daher haben wir

$$|E''| = \sum_{i=1}^6 k_i \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^6 (k_j + 1)$$

Kanten. Somit gilt:

$$|E''| \in \mathcal{O}(M),$$

das heißt, die Kantenanzahl wächst linear mit der Knotenanzahl und ist unabhängig von der Schweißfigurenanzahl N .

Wir nennen analog zu Abschnitt 6.2 $B \in \mathbb{R}^{N \times |E''|}$ die *Schweißfiguren-Kantenmatrix*, das heißt,

$$b_{m,uv} := \begin{cases} 1, & \text{falls } q_u \in C_A(m) \text{ oder } q_v \in C_A(m), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie in Abschnitt 6.2 erläutert, lässt sich die Erfüllung der Schweißaufgabe wie folgt formulieren:

$$Bx \geq e,$$

wobei $x \in \{0, 1\}^{|E''|}$ ein Kanteninzidenzvektor ist. Wir bezeichnen mit c_{uv} die Kosten, um vom Punkt q_u zu q_v zu gelangen, das heißt,

$$c_{uv} = \|q_u - q_v\|_{P_{Rob}}.$$

Des Weiteren wollen wir unter $G''(x) = (V_M(x), E''(x))$ den durch den Kanteninzidenzvektor x induzierten Untergraph von G'' verstehen.

Der Punkt q_H ist definiert durch den folgenden Index:

$$H \in \underset{i \in \{1, \dots, M\}}{\text{Argmin}} \|q_i - R_{Home}\|_{P_{Rob}}.$$

Der Modellierungsansatz lautet folgendermaßen:

$$\min \sum_{uv \in E''} c_{uv} x_{uv} \quad (6.3)$$

$$\text{s.t. : } Bx \geq e \quad (6.3.a)$$

$$x(\delta(v)) = 2 \quad \forall v \in V_M(x) \cup \{H\} \quad (6.3.b)$$

$$\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 2 \quad \forall S \subset V_M(x) \quad 1 \leq |S| \leq |V_M(x)| - 1 \quad (6.3.c)$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall uv \in E''. \quad (6.3.d)$$

Um den induzierten Untergraphen $G''(x)$ zu umgehen, führen wir neue Variablen y_i , $i \in V_M$, wie folgt ein:

$$y_i := \begin{cases} 1, & \text{falls Knoten } i \text{ gewählt wird,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich:

$$\min \sum_{uv \in E''} c_{uv} x_{uv} \quad (6.4)$$

$$\text{s.t. : } Bx \geq e \quad (6.4.a)$$

$$x(\delta(v)) = 2 \cdot y_v \quad \forall v \in V_M \quad (6.4.b)$$

$$x(\delta(S)) \geq 2 \cdot y_v \quad \forall S \subset V_M : H \in S, v \in V_M \setminus S \quad (6.4.c)$$

$$y_H = 1 \quad (6.4.d)$$

$$x_{uv}, y_u \in \{0, 1\} \quad \forall u \in V_M, \forall uv \in E''. \quad (6.4.e)$$

Diese Verallgemeinerung des TSP entspricht nicht exakt den Modellen CSP und PCTSP (vergleiche Abschnitt 7.5), da wir nicht alle Knoten aus V_M überdecken wollen. Unser Ziel besteht lediglich in der Erfüllung der Schweißaufgabe.

6.3.1 Lösungsstrategie

Zur Bestimmung der Lösung von Problem (6.4) folgen wir der Lösungsstrategie aus Abschnitt 7.3.

Wir betrachten dazu zunächst die folgende Relaxierung:

$$\min \sum_{uv \in E''} c_{uv} x_{uv} \quad (6.5)$$

$$\text{s.t. : } Bx \geq e \quad (6.5.a)$$

$$x(\delta(v)) = 2 \cdot y_v \quad \forall v \in V_M \quad (6.5.b)$$

$$y_H = 1 \quad (6.5.c)$$

$$x_{uv}, y_u \in \{0, 1\} \quad \forall u, v \in V_M. \quad (6.5.d)$$

Durch weitere Relaxierung der Ganzzahligkeitsbedingung 6.5.d erhalten wir das Startproblem für die Branch and Cut Methode:

$$\min \sum_{uv \in E''} c_{uv} x_{uv} \quad (6.6)$$

$$\text{s.t. : } Bx \geq e \quad (6.6.a)$$

$$x(\delta(v)) = 2 \cdot y_v \quad \forall v \in V_M \quad (6.6.b)$$

$$y_H = 1 \quad (6.6.c)$$

$$0 \leq x_{uv}, y_u \leq 1 \quad \forall u, v \in V_M. \quad (6.6.d)$$

6.3.2 Diskussion des Modells

Die Vorteile des Modells liegen in der Unabhängigkeit der Kantenanzahl von der Schweißfigurenanzahl, sowie in der direkten Approximation einer günstigen zulässigen Bahn. Jedoch werden Forderungen an günstige Bahnen wie Krümmung und Torsion aufgrund lediglicher Betrachtung von Abständen zwischen zwei Knoten nicht beachtet. Um diese Gütekriterien zusätzlich erfüllen zu können, sind zusätzliche Kanten zwischen derzeit nicht adjazenten Knoten denkbar. Diese würden andere Winkel zwischen adjazenten Kanten erlauben. Eine Variante bestünde darin, zwei Knoten zu verbinden, wenn sie im gleichen Teilquader liegen, vergleiche Abschnitt 5.2. Nach wenigen Überlegungen kann ein Knoten dann bis zu $728 = 3^6 - 1$ Nachbarknoten haben. Zusätzlich werden Bedingungen benötigt, die ein Mindestmaß des Winkels zwischen adjazenten Kanten verlangen.

Bemerkung 6.6.

Dieser Lösungsansatz berücksichtigt nicht alle Gütekriterien, doch er erlaubt die Ermittlung einer Reihenfolge der Schweißfiguren. Unter Verwendung vorhandener Algorithmen bietet diese Reihenfolge die Möglichkeit zur Bestimmung einer günstigen Bahn.

7 Das Traveling Salesman Problem

Quellen für diesen Abschnitt sind [1],[2],[14].

7.1 Einführung des TSP

Das Traveling Salesman Problem (Problem des Handlungsreisenden, kurz TSP) ist folgendes kombinatorisches Optimierungsproblem. Ziel ist das Ermitteln einer kürzesten Rundreise durch vorgegebene Orte. Jeder Ort muss dabei genau einmal besucht werden und die Reise endet dort, wo sie begonnen hat. Aufgrund von Einbahnstraßen, Hindernissen oder Ähnlichem kann die Länge des Hinweges vom Ort A zum Ort B eine andere sein als die des Rückweges. Sind Hin- und Rückweg gleichlang, so sprechen wir vom symmetrischen TSP. Nur diese Art des TSP wollen wir betrachten.

Die Faszination des TSPs besteht im Gegensatz von der Einfachheit der Formulierung zur Schwere der Lösung. In vielen praktischen Anwendungen müssen meist Zusatzbedingungen wie Zeitfenster oder eingeschränkte Ressourcen beachtet werden, was die Lösung des Problems erheblich erschwert.

Einordnung in die Komplexitätstheorie

Im Jahre 1972 bewies R. Karp die NP-Vollständigkeit des Hamiltonkreisproblems, aus der sich leicht die Einordnung des TSP in die komplextheoretische Klasse **NP-hard** ableiten lässt. Es wird daher sehr stark angenommen (also im Fall $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$), dass die Worst-case-Laufzeit jedes deterministischen Algorithmus, der für dieses Problem stets optimale Lösungen liefert, im besten Fall exponentiell von der Anzahl der Orte abhängt. Schon für wenige Orte kann die benötigte Laufzeit eines solchen Algorithmus also unpraktikabel viel Zeit beanspruchen.

Zur Geschichte des TSP

Die heute übliche Bezeichnung Traveling Salesman Problem wurde Mitte des 20. Jahrhunderts durch H. Whitney von der Princeton University eingeführt. Betrachtungen von mathematisch verwandten Problemen erfolgten bereits um 1800 durch den irischen Mathematiker Sir W. Hamilton und den britischen Mathematiker T. Kirkman.

Seit der ersten expliziten Erwähnung als mathematisches Optimierungsproblem im Jahre 1930 durch Karl Menger haben sich viele Forscher damit befasst und neue Optimierungsverfahren daran entwickelt und erprobt.

7.2 Mathematische Modellierung des symmetrischen TSP

In diesem Abschnitt soll das symmetrische TSP auf n Orten mathematisch als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem formuliert werden. Dazu führen wir zunächst wichtige Begriffe aus der Graphentheorie ein:

Wir betrachten den vollständigen Graphen auf n Knoten $K_n = (V_n, E_n)$ mit Kantengewichten $c_{uv} \forall uv \in E_n$. Dabei sind V_n die Knotenmenge, E_n die Kantenmenge und es gilt: $|V_n| = n$ und $|E_n| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Des Weiteren bezeichnen wir mit $E_n(W)$ die Kantenmenge des vollständigen Graphen auf der Knotenmenge $W \subset V_n$.

In der Menge $\delta(v)$ sind die zum Knoten v inzidenten Kanten enthalten und $|\delta(v)|$ bezeichnet den Grad des Knotens v .

Eine Kantenmenge $C = \{v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{k-1}v_k, v_kv_1\}$ mit $v_i \neq v_j$ für $i \neq j$ heißt Kreis mit Länge $|C| = k$ oder auch Subtour (Kurzyklus) falls $k < n$.

Ein Kreis der Länge n in K_n wird Tour oder Hamiltonkreis genannt.

Der Inzidenzvektor $x^F \in \mathbb{R}^{|E_n|}$ einer Kantenmenge $F \subseteq E_n$ ist definiert durch:

$$x_{uv}^F = \begin{cases} 1, & \text{falls } uv \in F, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Unter $x(F)$ für $F \subseteq E_n$ wollen wir folgendes verstehen: $x(F) = \sum_{uv \in F} x_{uv}$.

Analog definieren wir für die Kantengewichte $c(F) := \sum_{uv \in F} c_{uv}$.

Wir betrachten nun die mathematische Formulierung des TSP aus [1], wobei jeder Knoten aus V_n einen der Orte repräsentiert und die Kantengewichte deren Abstand beinhalten:

$$\min \sum_{uv \in E_n} c_{uv} x_{uv} \quad (7.1)$$

$$\text{s.t. : } x(\delta(v)) = 2 \quad \forall v \in V_n \quad (7.1.a)$$

$$x(C) \leq |C| - 1 \quad \forall \text{Kreise } C \subseteq E_n \quad |C| < n \quad (7.1.b)$$

$$x_{uv} \in \{0, 1\} \quad \forall u, v \in V. \quad (7.1.c)$$

Korrektheit der mathematischen Modellierung

Wir zeigen zunächst die Korrektheit der Modellierung (7.1). Die Nebenbedingungen in (7.1.a) stellen sicher, dass jeder Knoten $v \in V_n$ zu zwei Kanten inzident ist und die Gesamtkonfiguration aus n Kanten besteht:

$$x(E_n) = \frac{\sum_{v \in V_n} x(\delta(v))}{2} = \frac{2 \cdot n}{2} = n.$$

Die Ungleichungen (7.1.b) eliminieren sämtliche Subtours. Angenommen wir hätten eine Subtour C_k der Länge k . Dann würde gelten:

$$k = x(C_k) \stackrel{(7.1.b)}{\leq} |C_k| - 1 = k - 1 \quad \zeta.$$

Bemerkung 7.1.

Eine günstigere Variante für die Subtour-Elimination ergibt sich aus der Tatsache, dass jede echte Teilmenge S der Knotenmenge V_n über mindestens zwei Kanten mit der Menge $V_n \setminus S$ verbunden sein muss.

$$\sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 2 \quad \forall S \subset V_n \text{ mit } 2 \leq |S| \leq |V_n| - 2. \quad (7.1.b')$$

Die Schwierigkeit beim Lösen von TSP besteht in der Ganzzahligkeit und nicht in der Anzahl der Nebenbedingungen (vergleiche Abschnitt 7.3).

TSP-Polytop Q_T^n

Die Nebenbedingungen von (7.1) bestimmen die Ecken des Polytops Q_T^n .

Definition 7.2.

Das (symmetrische) TSP-Polytop Q_T^n für den vollständigen Graphen $K_n = (V_n, E_n)$ ist definiert durch

$$Q_T^n := \text{conv} \{x^T \in \mathbb{R}^{|E_n|} : T \text{ ist eine Tour in } K_n\}.$$

Zum Verständnis werden in folgender Definition die Begriffe *Polyeder* und *Polytop* eingeführt; Definition 7.5 klärt unter anderem den Begriff *Ecke*.

Definition 7.3.

Mit Polyeder bezeichnen wir den Schnitt endlich vieler Halbräume:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s_j, x \rangle \leq r_j, j \in \{1, \dots, m\}\} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \text{ mit} \\ A := (s_1, \dots, s_m)^T \text{ und } b := (r_1, \dots, r_m)^T.$$

Jedes beschränkte Polyeder wird als Polytop bezeichnet.

Bemerkung 7.4.

Jede Hyperebene ist Schnitt ihrer zugehörigen Halbräume.

Daher stellt auch jede Menge der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, Cx = d\}$$

ein Polyeder dar.

Definition 7.5.

Wir nennen die Ungleichung $s^T x \leq r$ gültig zur Menge $P \subset \mathbb{R}^n$, falls

$$P \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \langle s, x \rangle \leq r\}.$$

Eine Teilmenge F eines Polyeders P heißt Seitenfläche von P , falls eine gültige Ungleichung $a^T x \leq b$ zu P existiert, so dass gilt

$$F = \{x \in P : a^T x = b\}.$$

Wir sagen $a^T x \leq b$ definiert die Seitenfläche F .

Eine Seitenfläche F von P mit

$$\dim(F) = \dim(P) - 1 \text{ heißt } \underline{\text{Facette}},$$

$$\dim(F) = 1 \text{ heißt } \underline{\text{Kante}},$$

$$\dim(F) = 0 \text{ heißt } \underline{\text{Extrempunkt}} \text{ oder } \underline{\text{Ecke}}.$$

Zwei Ungleichungen $a^T x \leq a_0$ und $b^T x \leq b_0$ werden äquivalent bezüglich Polyeder P genannt, wenn gilt

$$\{x \in P : a^T x \leq a_0\} = \{x \in P : b^T x \leq b_0\}.$$

Der folgende Satz liefert nützliche Aussagen für das Schnittebenenverfahren zur Lösung vom symmetrischen TSP.

Satz 7.6. [2]

Sei $K_n = (V_n, E_n)$ der vollständige Graph auf $n \geq 6$ Knoten sowie \mathcal{V} eine beliebige Familie von Mengen aus V_n mit

$$W \in \mathcal{V} \Leftrightarrow V_n \setminus W \notin \mathcal{V} \text{ und } 3 \leq |W| \leq n - 3.$$

Dann stellt das Folgende ein System von facettendefinierenden Ungleichungen für Q_T^n dar, wobei keine zwei davon äquivalent bezüglich Q_T^n sind:

$$(a) \ x_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in E_n$$

$$(b) \ x_{ij} \leq 1 \quad \forall ij \in E_n$$

$$(c) \ \text{Subtour-Eliminationsbedingungen:}$$

$$x(E_n(W)) \leq |W| - 1 \quad \forall W \in \mathcal{V}.$$

Außerdem formen die Gradbedingungen $x(\delta(v)) = 2$ für alle Knoten v aus V_n ein minimales Gleichungssystem für Q_T^n .

Die Zahl der derzeit bekannten Facetten für Q_T^{120} ist größer als 10^{100} mal die Zahl der Atome des Universums. Es gibt keinen Computer, der all diese Nebenbedingungen speichern und das zugehörige System lösen kann. Aber Dantzig, Fulkerson und Johnson konnten 1954 zeigen, dass schon eine geeignete Menge von höchstens $\frac{1}{2}n(n-1)$ Ungleichungen aus dem Universum aller facettendefinierender Ungleichungen genügt, um Optimalität einer Ecke von Q_T^n zu beweisen.

7.3 Lösungsstrategie für TSP-Anwendungen

Wir betrachten die in der ganzzahligen Optimierung bekannte *Branch and Cut Methode*, welche eine Verknüpfung aus der Branch and Bound Methode und dem Schnittebenenverfahren darstellt.

7.3.1 Ablauf der Branch and Cut Methode

Die Branch and Cut Methode startet mit der Betrachtung einer Relaxierung in Form eines linearen Programmes, die beispielsweise mit dem Simplex-Verfahren gelöst wird. In der Regel wird diese ermittelte Lösung nicht alle Bedingungen des Ursprungsproblems erfüllen, wie zum Beispiel die Ganzzahligkeitsbedingungen. Das Schnittebenenverfahren fügt dann der Relaxierung neue Ungleichungen hinzu und löst dieses neu entstandene System. Ist die so erhaltene Lösung zulässig für das Ausgangsproblem, haben wir dieses gelöst. Werden keine günstigen Schnittebenen mehr gefunden und sind die ermittelten Lösungen nicht ganzzahlig, dann erfolgt der Start der Branch and Bound Methode.

7.3.2 Komplexitätsbetrachtungen

Laufzeitanalysen des Simplex-Algorithmus ergaben, dass im Worst Case exponentiell viele Iterationen notwendig sind. Dies bewiesen Klee und Minty 1972 anhand eines perturbierten Würfels, dessen Ecken alle abgelaufen wurden. Empirische Analysen zeigen jedoch ein eher polynomiales Verhalten.

Das Schnittebenenverfahren kann ein polynomialer Algorithmus sein, wenn das Ermitteln guter Schnittebenen polynomial geschieht, dies wurde zum Beispiel mithilfe der Ellipsoid Methode gezeigt.

Eine mögliche Bestimmung guter Schnittebenen besteht in der Betrachtung der Subtour-Eliminationsbedingungen. Für die Detektion verletzter Bedingungen wird mittels Max-Flow Solver im durch die relaxierte Lösung induzierten Untergraphen ein maximaler Fluss ermittelt.

Als Beispiel für einen Max-Flow Solver sei der *Ford-Fulkerson Algorithmus* genannt, für welchen Edmonds und Karp einen polynomialen Gesamtaufwand zeigten. Aufgrund des berühmten Max-Flow-Min-Cut Theorems entspricht der Wert des Flusses exakt dem Wert eines kapazitätsminimalen Schnittes. Stellt dieser Wert einen Widerspruch zu Subtour-Eliminationsbedingungen dar, so erhalten wir eine neue Schnittebene.

7.3.3 Branch and Bound Methode für TSP

Ein Standardverfahren ist das *Branching* auf einer einzelnen Variablen, das heißt, in einem Teilproblem wird diese Variable auf null gesetzt und im anderen auf eins. Daraus resultiert eine Teilung der zulässigen Lösungsmenge in zwei disjunkte Mengen.

Durch iterative Anwendung dieses Verfahrens wird ein Entscheidungsbaum aufgebaut, in dem ein Teilproblem umso weiter eingeschränkt ist, je tiefer es im Baum liegt. Auf diese Art kann der gesamte Lösungsraum systematisch durchsucht werden.

Ein Vorteil dieses Verfahrens gegenüber reiner Enumeration aller Lösungen beruht auf folgender Tatsache: In einigen Fällen können komplette Teilbäume abgeschnitten werden (Bounding), weil klar ist, dass in diesem Teilbaum keine optimale Lösung enthalten sein kann. Zum Thema Schranken sei auf den folgenden Abschnitt 7.4 verwiesen.

7.4 Schranken für den Optimalwert des TSP

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung kombinatorischer Probleme sind Schranken für den Optimalwert, dazu wird in diesem Abschnitt ein grober Überblick gegeben werden.

Obere Schranken / Heuristiken für das TSP

Durch Einordnung des TSP in die Komplexitätsklasse **NP-hard** ist die Suche nach einem polynomialen Algorithmus nicht sinnvoll. Daher liegt die Idee nahe, nach einem Algorithmus mit festem maximalen Fehler zu suchen.

In [2] wird dazu das folgende Ergebnis von Sahni und Gonzales aus dem Jahr 1976 vorgestellt.

Satz 7.7. (*Sahni und Gonzales (1976)*)

Wenn es eine Heuristik A mit polynomial begrenzter Arbeitszeit gibt sowie eine Konstante r , $1 \leq r < \infty$, so dass für alle Instanzen I

$$A(I) \leq r \cdot OPT(I)$$

gilt, so ist **P=NP**.

Ein etwas erfreulicheres Ergebnis für die Approximation einer TSP-Lösung bei Gültigkeit der Dreiecksungleichung für die Kantengewichte lieferte Christofides 1976. Für eben genannten Spezialfall des TSP gab er einen polynomialen Algorithmus ($\mathcal{O}(n^3)$) an, welcher einen festen maximalen Fehler von 50% garantiert.

Grundsätzlich gibt es drei Arten von Heuristiken: die konstruierenden, die verbessernden und die gemischten Heuristiken, welche sowohl konstruieren als auch verbessern. Weitere Informationen zu Heuristiken und empirische Analysen dazu finden wir in [1] und [2].

Untere Schranken / Relaxierungen

Relaxierungen des TSP erhalten wir durch Abschwächung der Nebenbedingungen. Grundsätzlich wird eine Relaxierung so gewählt, dass das verbleibende Problem leichter als das Ursprüngliche lösbar ist. Wichtige Relaxierungen sind durch *1-Baum*, *2-Matching* sowie dem *Zuweisungsproblem* gegeben. Weitere diesbezügliche Informationen finden sich unter anderem in [2].

7.5 Verallgemeinerungen des TSP

Eine Hauptannahme des TSP ist der Besuch jedes Ortes durch den Handelsreisenden. Es existieren viele reale Probleme, bei denen diese Annahme keine Relevanz besitzt. Daher gehen wir in diesem Abschnitt davon aus, nicht mehr alle Orte besuchen zu wollen.

7.5.1 Covering Salesman Problem

Das Covering Salesman Problem (CSP) besteht in der Ermittlung einer Tour mit geringsten Kosten auf einer Teilmenge der n gegebenen Orte, so dass die Minimaldistanzen zwischen nicht auf der Tour befindlichen Orten und in der Tour enthaltenen Orten kleiner als die gegebene *Überdeckungsdistanz* S sind. Dieses Problem stellt eine Verallgemeinerung des TSP dar. Falls nämlich $S = 0$ (oder allgemeiner falls S kleiner als die kürzeste Distanz aller Orte untereinander) ist, entspricht das CSP exakt dem TSP, da dann jeder Ort besucht werden muss. Genauere Informationen finden wir in [4].

Die Einführung einer geometrischen Version des CSP erfolgt in [5], wobei anstatt der Überdeckungsdistanz S Nachbarschaften betrachtet werden. Für diese Version existiert ein Polynomialzeit-Algorithmus mit fester Fehler-schranke für konvexe Nachbarschaften in der Ebene, vergleiche [5].

Dem Autor dieser Arbeit ist keine Literatur bekannt, welche sich mit Nachbarschaften im \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ beschäftigt.

7.5.2 Price Collecting TSP

Eine weitere Verallgemeinerung des TSP verkörpert das Price Collecting TSP (kurz: PCTSP). Ein Handelsreisender bekommt dabei einen Preis w_k für jeden Ort k , den er besucht; bezahlt eine Strafe p_l für jeden Ort l , den er nicht erreicht. Die Reisekosten von Ort i zu Ort j betragen c_{ij} . Das PCTSP besteht darin, die Reisekosten und Strafen zu minimieren, wobei der Handelsreisende aber einen Mindestpreis w_0 erreichen muss. Nähere Informationen finden sich in [7]. Facettendefinierende Ungleichungen für das PCTSP-Polytop stellt [8] vor.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Der Abschnitt 2 stellte grundlegend das Problem der Bahnermittlung beim Laser-Remote-Schweißen vor. Die hier betrachtete Anwendung verkörpert nur eine der vielseitigen Einsatzmöglichkeiten. Weitere bestehen im Laser-Schneiden, Gravieren und anderen robotergestützten Remote-Bearbeitungsmethoden.

Modelle zur Bahngenerierung wurden in Abschnitt 3 diskutiert. Es sind Verallgemeinerungen des Idealmodelles aus Abschnitt 3.1 durch Integration von Schweißzeit, Verfahrszeit sowie Geschwindigkeit des TCP denkbar. Diese Aspekte wurden derzeit nicht betrachtet, da der Roboter diese getrennt von Ort und Orientierung des TCP steuert.

Ziel der Techniker besteht darin, den TCP mit möglichst konstanter Geschwindigkeit und dabei möglichst maximaler Geschwindigkeit auf der Bahn verfahren zu lassen, um wiederum den Verschleiß des Roboters zu vermindern.

Der Abschnitt 4 lieferte Modelle, welche nur von den Indikatoren aus Abschnitt 4.1 abhängig sind. Satz 4.5 führte zur Verwerfung des TSP-Ansatzes aus Abschnitt 4.3, jedoch erscheint eine Untersuchung des k -Tupel-Ansatzes aus 4.4 sinnvoll.

Verschiedene Diskretisierungen der zulässigen Menge C_A wurden in Abschnitt 5 betrachtet. Darauf beruhende Modellierungsansätze stellt Abschnitt 6 vor. Eine algorithmische Umsetzung des Lösungsansatzes aus Abschnitt 6.3 wäre sehr wünschenswert, um empirische Analysen des Ansatzes durchführen zu können.

Der letzte Abschnitt 7 stellt das TSP vor und liefert eine Lösungsstrategie.

Zusammenfassend sei festgestellt, dass diese Arbeit eine Vielzahl von Modellierungsansätzen enthält, wobei dem Autor der Ansatz aus Abschnitt 6.3 am erfolgsversprechendsten erscheint.

Danksagung

In erster Linie möchte ich mich bei meinen Betreuern Prof. C. Helmberg und Dipl.math. D. Wenzel bedanken, die immer ein offenes Ohr für meine Probleme hatten und mir auch mit Rat und Tat zu Seite standen. Weiterhin danke ich meiner Familie für die Unterstützung während der gesamten Studienzeit. Ebenso ein großes „Dankeschön“ an meine Freunde, die mir moralischen Beistand gaben.

Abbildungsverzeichnis

Die Abbildungen vorstehender Diplomarbeit entstammen Präsentationen der Hörmann Engineering GmbH beziehungsweise wurden vom Autor selbständig gefertigt.

1	Prinzip des Laserschweißens	7
2	Prinzip der SAO	8
3	Virtuelle Strahlenquelle	9
4	Mögliche Schweißkurven und ihre Schweißzentren	10
5	Einstrahlwinkel α	11
6	Einstrahlkegel	11
7	Skizze zur Berechnung von γ_j	12
8	Strahlenkegel zur Blickrichtung $-n_s$	14
9	Skizze zum Arbeitsbereich	15
10	Skizze zur Entstehung von $C_A(j, w)$	17
11	Skizze zur Berechnung \tilde{r}_j	18
12	Skizze zu $C_A(j, w)$	18
13	Standard-6-Achsen-Knickarmroboter mit Laserschweißeinheit	20
14	Freiheitsgrade am Beispiel eines Armes	20
15	Verschiedene Realisierungen	22
16	Erreichbarer Bereich eines Roboters	22
17	Skizze zum Polygonzug	29
18	Skizze zum Indikator Ind_N	33
19	Beispiel zur Indikatoranpassung bezüglich des Höhengspiels	33
20	Skizze zum Gitter auf dem Rechteck \mathcal{R}	39
21	Konvention für sphärische Koordinaten	45
22	Skizze zur Bestimmung des maximalen Wertes von $\tilde{C}_A(j)$	51
23	Skizze zur Bestimmung des minimalen Wertes von $\tilde{C}_A(j)$	51

Literatur

- [1] G. Reinelt: *The Traveling Salesman: Computational Solutions for TSP Applications*, Springer Verlag, 1994.
- [2] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, D. B. Shmoys: *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons Ltd, 1985.
- [3] Y. Nesterov, *Introductory Lectures on Convex Optimization* Kluwer, 2004.
- [4] J. R. Current, D. A. Schilling: *The Covering Salesman Problem*, Transportation Science, 1989.
- [5] E. M. Arkins, R. Hassin: *Approximation algorithms for the geometric Covering Salesman Problem*, 1995.
- [6] E. Ballas: *New classes of efficiently solvable generalized Traveling Salesman Problems*, Annals of Operations Research 86 (1999), 529-558.
- [7] E. Ballas: *The Prize Collecting Traveling Salesman Problem* Networks 19 (1989), 621-636.
- [8] E. Ballas: *The Prize Collecting Traveling Salesman Problem: II. Polyhedral results*, Networks 25 (1995), 199-216.
- [9] R. Bar-Yehuda, G. Even, S. Shahar: *On Approximating A Geometric Price-Collecting Traveling Salesman Problem With Time Windows*, Journal of Algorithms Volume 55, Issue 1, 2005, 76-92.
- [10] G. Ausiello, V. Bonifaci, L. Laura: *The Online prize-collecting traveling salesman problem*, Information Processing Letters, to appear.
- [11] J. Araoz, E. Fernandez, O. Meza : *Solving the Prize-collecting Rural Postman Problem* Research Report DR-2007/12, EIO Departament, Technical University of Catalonia.
- [12] T. P. Pachidis, K. N. Tarchanidis, J. N. Lygouras, P. G. Tsalides: *Robot Path Generation Method for a Welding System Based on Pseudo Stereo Visual Servo Control*, EURASIP Journal on Applied Signal Processing 2005: 14, 2268-2280.

- [13] M. F. Zäh, G. Reinhart, F. Oefele, U.Munzert: *Remote-Laserstrahlschweißen*, wT Werkstatttechnik online Jahrgang 96 (2006), H. 9 637-642.
- [14] URL: <http://www.wikipedia.de>.

A Algorithmen

Sämtliche Algorithmen wurden MATLAB implementiert.

A.1 Indikatoranpassung

Der Algorithmus Zylinder liefert die Abbildung 19 aus Abschnitt 4 für die Eingabe:

```
Zylinder([20,0,0],[1,1,0]/sqrt(2),[30,0,0],[1,1,1]/sqrt(3),10)
```

```
function Zylinder(p,nop,q,noq,h); close all;
hold on
z=[0,3*norm(p-q)];
degrad=pi/180;
w=0:5:360;
v=size(z,2);
m=size(w,2);
x=zeros(v,m);
y=zeros(v,m);
no=(max([p;q])-min([p;q]))/norm(p-q);
drehachse=cross([0;0;1],no');
[Theta,Phi,R]=cart2sph(no(1),no(2),no(3));
if norm(drehachse)~=0;
    drehachse=drehachse/norm(drehachse);
else
    disp('Drehachse ist Nullvektor')
end
Phi=pi/2-Phi;
d1=drehachse(1);
d2=drehachse(2);
d3=drehachse(3);
%wiki Drehmatrix
D=[cos(Phi)+d1^2*(1-cos(Phi)), d1*d2*(1-cos(Phi)) ...
    -d3*sin(Phi), d1*d3*(1-cos(Phi))+d2*sin(Phi); ...
    d1*d2*(1-cos(Phi))+d3*sin(Phi), cos(Phi)+ ...
    d2^2*sin(Phi), d2*d3*(1-cos(Phi))-d1*sin(Phi); ...
    d3*d1*(1-cos(Phi))-d2*sin(Phi), ...
    d3*d2*(1-cos(Phi))+d1*sin(Phi), ...
    cos(Phi)+d3^2*(1-cos(Phi))];
for k=1:v
    x(k,:)=h*cos(degrad*w);
```

```

    y(k,:)=h*sin(degrad*w);
end Z=(z)'; for k=2:m
    Z=[Z,z'];
end hv=max([p;q])-min([p;q]); for k=1:v
    for l=1:m
        temp=D*[x(k,l);y(k,l);Z(k,l)];
        x(k,l)=temp(1);
        y(k,l)=temp(2);
        Z(k,l)=temp(3);
        temp=[x(k,l)+min([p(1),q(1)]-hv(1));...
              y(k,l)+min([p(2),q(2)]-hv(2));...
              Z(k,l)+min([p(2),q(2)]-hv(3))];
        x(k,l)=temp(1);
        y(k,l)=temp(2);
        Z(k,l)=temp(3);
    end
end f=surf(x,y,Z);
set(f,'Facecolor','g');
set(f,'Edgecolor','None');
set(f,'FaceAlpha',0.1); t=[-1,2];
plot3((t*hv(1))+min([p(1),q(1)]),(t*hv(2))+min([p(2),q(2)]),...
      (t*hv(3))+min([p(2),q(2)]),'k-');
xlabel('x'); ylabel('y'); plot3(p(1),p(2),p(3),'r+');
plot3(q(1),q(2),q(3),'r+'); n1=nop; n1=n1/norm(n1); n2=noq;
n2=n2/norm(n2); s=[0,1];
plot3(p(1)+s*n1(1),p(2)+s*n1(2),p(3)+s*n1(3),'b-');
plot3(q(1)+s*n2(1),q(2)+s*n2(2),q(3)+s*n2(3),'b-'); s=[-h,h];
sinalpha=sin(acos(n1*(q-p)'/norm(p-q)));
sinbeta=sin(acos(n2*(p-q)'/norm(p-q)));
plot3(p(1)+s/sinalpha*n1(1),p(2)+s/sinalpha*n1(2), ...
      p(3)+s/sinalpha*n1(3),'k:');
plot3(q(1)+s/sinbeta*n2(1),q(2)+s/sinbeta*n2(2), ...
      q(3)+s/sinbeta*n2(3),'k:');
plot3(p(1)+s/sinalpha*n1(1),p(2)+s/sinalpha*n1(2), ...
      p(3)+s/sinalpha*n1(3),'k*');
plot3(q(1)+s/sinbeta*n2(1),q(2)+s/sinbeta*n2(2), ...
      q(3)+s/sinbeta*n2(3),'k*'); p1=p-h/sinalpha*n1;
p2=p+h/sinalpha*n1;
q1=q-h/sinbeta*n2;
q2=q+h/sinbeta*n2;

```

```

if sum(n1==n2)<3;
    s=(q1-p1)*(n1'-n1*n2'*n2')/(2*h*(1-(n1*n2')^2))*sinalpha;
    t=(p1-q1)*(n2'-n1*n2'*n1')/(2*h*(1-(n1*n2')^2))*sinbeta;
else
    %disp('else');
    M=(p+q)/2;
    s=(M-p1)/(2*h)*sinalpha*n1';
    t=(M-q1)/(2*h)*sinbeta*n2';
end if s<=0
    Pp=p1;
else if s>=1
    Pp=p2;
else
    Pp=p1+s*2*h/sinalpha*n1;
end
end if t<=0
    Pq=q1;
else if t>=1
    Pq=q2;
else
    Pq=q1+t*2*h/sinbeta*n2;
end
end
plot3(Pp(1),Pp(2),Pp(3),'r*');
plot3(Pq(1),Pq(2),Pq(3),'r*');
t=[0,1];
plot3(Pp(1)+t*(Pq(1)-Pp(1)),Pp(2)+t*(Pq(2)-Pp(2)), ...
      Pp(3)+t*(Pq(3)-Pp(3)),'r:');
alphaalt=acos(n1*(q-p)'/norm(p-q))
betaalt=acos(n2*(p-q)'/norm(p-q))
alphaneu=acos(n1*(Pq-Pp)'/norm(Pq-Pp))
betaneu=acos(n2*(Pp-Pq)'/norm(Pq-Pp))

```

A.2 Quaderbestimmung

Die folgenden Algorithmen dient der Bestimmung des Quaders Q aus Abschnitt 5.2. Sei N die Anzahl der Schweißobjekte. Dann sind $P \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ die Matrix der Schweißzentren, $M \in \mathbb{R}^{N \times 3}$ die Matrix der Oberflächennormalen, $\gamma \in \mathbb{R}^N$ der Vektor der Grenzwinkel und $r \in \mathbb{R}^N$ der Vektor mit den Ausdehnungen der Schweißobjekte.

```

function Q=Quader(P,M,gamma,r,xHome,oHome,h,gammastern,rOptik)
help=zeros(size(N,1),6); Q=zeros(1,12);
[help(:,1),help(:,2)]=minmax(P,M,r,[1,0,0]',gamma,gammastern, ...
    h, rOptik);
[help(:,3),help(:,4)]=minmax(P,M,r,[0,1,0]',gamma,gammastern, ...
    h; rOptik);
[help(:,5),help(:,6)]=minmax(P,M,r,[0,0,1]',gamma,gammastern, ...
    h,rOptik);
help(size(N,1)+1,:)= [xHome(1),xHome(1),xHome(2),xHome(2), ...
    xHome(3),xHome(3)];
Q([2,4,6])=[max(help(:,2)),max(help(:,4)),max(help(:,6))];
Q([1,3,5])=[min(help(:,1)),min(help(:,3)),min(help(:,5))];
Q(7:12)=[-pi,pi,-pi,pi,-pi,pi];

function [v1,v2]=minmax(P,N,r,ei,gamma,h,rOptik);
Winkel=acos(N*ei); Pos=P*ei; n=length(Winkel); v1=zeros(n,1);
v2=zeros(n,1); for k=1:n
    l=(rOptik-r(k)/cos(gammastern))/tan(gammastern);
    alpha=gamma(k);
    if Winkel(k)<alpha
        v2(k)=Pos(k)+l+h;
        %disp('Fall 1 Max');
    else if Winkel(k)<pi/2+alpha
        v2(k)=Pos(k)+cos(Winkel(k)-alpha)*(l+h);
        %disp('Fall 2 Max');
    else v2(k)=Pos(k)+cos(Winkel(k)-alpha)*(l-h);
        %disp('Fall 3 Max');
    end
end
if Winkel(k)>pi-alpha
    v1(k)=Pos(k)+l+h;
    %disp('Fall 1 Min');
else
    if Winkel(k)>pi/2-alpha
        v1(k)=Pos(k)+cos(Winkel(k)+alpha)*(l+h);
        %disp('Fall 2 Min');
    else v1(k)=Pos(k)+cos(Winkel(k)+alpha)*(l-h);
        %disp('Fall 3 Min');
    end
end
end
end

```

A.3 Nützliche Algorithmen

A.3.1 vec2euler

Es wurde ein Algorithmus implementiert, der einem Vektor v Eulerwinkel zuordnet, so dass v der z -Achse des gedrehten Koordinatensystems entspricht. Dabei werden sphärische Koordinaten mit der Konvention von MATLAB (siehe Abbildung 21) verwendet.

```
function [psi,theta,phi]=vec2euler(v,w);
%v,w sind Zeilenvektoren!
%v entspricht z-Achse, w entspricht x-achse;
%Annahme es gilt norm(v)=norm(w)=1 und <v,w>=0
%Eulerwinkel zxz-Konvention siehe Wiki
[Theta,Phi,R]=cart2sph(v(1),v(2),v(3));
psi=Theta-pi/2;

if psi<=-pi
    psi=psi+2*pi;
end theta=Phi-pi/2;
if theta<=-pi
    theta=theta+2*pi;
end if nargin==1
    phi=0;
else
    [e1,e2,e3]=euler(psi,theta,0);
    phi=acos(w*e1);
    beta=acos(w*e2);
    if beta>(pi/2)
        phi=-phi;
    end
end
end
```

A.3.2 IsInCA

Um zu überprüfen, ob ein Punkt $(x, o) \in \mathbb{T}$ im Aufenthaltsbereich zu Figur (p, n) mit Grenzwinkel γ und Ausdehnung r liegt, wird der folgende Algorithmus verwendet.

```
function Antwort=IsInCA(p,n,gamma,r,x,o,gammastern,rOptik,f,h)
[e1,e2,e3]=euler(o(1),o(2),o(3));
if abs(norm(x-p)-f)>(h-r)
```

```

    Antwort=0;
else hv=(x-p)/norm(x-p);
    if acos(hv*n')>gamma
        Antwort=0;
    else gammasternj=gammastern-asin(r/(norm(x-p)+1-h));
        if acos(-hv*e3)>gammasternj
            Antwort=0;
        else Antwort=1;
        end
    end
end
end

```

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, 19. März 2008