Polynomialzeitalgorithmen für F-Unabhängigkeit

D I P L O M A R B E I T

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
CHEMNITZ
Fakultät für Mathematik

eingereicht von Daniel Seidewitz,
geboren am 19. Juni 1982 in Rochlitz

Betreuer: Prof. Dr. C. Helmberg
Dr. Frank Göring

Chemnitz, den 1. November 2007

Aufgabenstellung

Eine Knotenmenge S eines Graphen G heißt *unabhängig*, falls der von S induzierte Untergraph $G[S]$ keine Kanten enthält.

Das Problem für gegebenes k zu entscheiden, ob der Graph G eine unabhängige Menge der Größe k besitzt, ist NP-schwer, jedoch für Graphen beschränkter Baumweite in Polynomialzeit entscheidbar.

F. Göring, J. Harant, D. Rautenbach und I. Schiermeyer haben in [8] als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Unabhängigkeit den Begriff der F-Unabhängigkeit eingeführt. Dabei heißt eine Menge S *F-unabhängig*, wenn der von S induzierte Graph $G[S]$ keinen zu F isomorphen Untergraphen enthält.

Die Autoren zeigen, dass das Problem zu entscheiden, ob ein Graph G eine F-unabhängige Menge der Größe k besitzt, ebenfalls NP-schwer ist.

Ziel dieser Arbeit ist es daher, möglichst große Graphenklassen zu bestimmen, für welche des Problem in Polynomialzeit entscheidbar ist. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Untersuchung der vielversprechenden Klasse der Graphen beschränkter Baumweite.

Inhaltsverzeichnis

Aufgabenstellung **1**

1 Begriffe und Notationen **3**

2 Graphen beschränkter Baumweite **5**
- 2.1 Einleitung . . . 5
- 2.2 Definition und Literatur . . . 5
- 2.3 Existenz eines Algorithmus mit linearer Laufzeit . . . 8
- 2.4 Grundriss des Algorithmus . . . 9
- 2.5 F, X-Signatur eines Graphen . . . 15
  - 2.5.1 Problemstellung und Bezeichnungen . . . 15
  - 2.5.2 Äquivalenzklassen von Untergraphen . . . 16
  - 2.5.3 Technische Details . . . 20
- 2.6 Spezialfall Baumweite 1 . . . 28

3 Die Klasse der well-F-covered Graphen **31**
- 3.1 Motivation . . . 31
- 3.2 Beschränkte Baumweite . . . 33
- 3.3 Universelle Verbinder . . . 39
- 3.4 Spezialfall $F = P_3$ . . . 43

Ergebnisse **52**

Literatur **53**

Selbständigkeitserklärung **54**

A Testprogramm für kleine Graphen **55**

1 Begriffe und Notationen

Alle in dieser Arbeit betrachteten Graphen sind schlichte Graphen ohne Schlingen und werden als Paare $(V, E \subseteq \binom{V}{2})$ aufgefasst, wobei $\binom{V}{2}$ alle 2-elementigen Teilmengen von V bezeichnet. Die Knotenmenge V eines Graphen wird auch mit $\mathrm{V}(G)$ und die Kantenmenge E mit $\mathrm{E}(G)$ bezeichnet. Eine Kante $\{u, v\} \in E$ wird abgekürzt als uv geschrieben. Für einen Knoten $v \in V$ (bzw. eine Kante $e \in E$) wird statt $G - \{v\}$ einfach $G - v$ (bzw. $G - e$) geschrieben.

Ein Graph $G' = (V', E')$ heißt *Untergraph* von G, geschrieben $G' \subseteq G$, falls $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Der von einer Knotenmenge $S \subseteq V$ auf G *induzierte* Untergraph ist definiert als $G[S] := (S, \{uv \in E : u, v \in V\})$. Für eine Knotenmenge $U \subseteq V$ bezeichne $G - U$ denjenigen Untergraphen von G, in welchem alle Knoten aus U gelöscht wurden, also $G - U = G[V - U]$. Ist $A \subseteq E$ eine Kantenmenge, dann sei $G - A := (V, E \setminus A)$ der Untergraph von G in dem alle Kanten aus A gelöscht wurden.

Für zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ sei die *Vereinigung* bzw. der *Durchschnitt* definiert als $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ und $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Der *Komplementärgraph* eines Graphen G ist definiert als $\bar{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$.

Eine Menge $S \subseteq V$ heißt *unabhängig*, falls der von S induzierte Untergraph $G[S]$ nur isolierte Knoten enthält. Sei F ein Graph, welcher mindestens einen Knoten und eine Kante enthält. Die Menge S heißt F*-unabhängig*, falls der von S induzierte Untergraph $G[S]$ keine Kopie von F enthält. Eine (F-)unabhängige Menge heißt *maximal*, falls keine (F-)unabhängige Menge T mit $S \subset T$ existiert. Falls die Menge S (F-)unabhängig ist und keine (F-)unabhängige Menge T mit $|T| > |S|$ existiert, so wird S *größte* (F-)unabhängige Menge von G genannt. Die Größe einer größten F-unabhängigen Menge von G wird mit $\alpha_F(G)$ bezeichnet.

Für einen Knoten $v \in V$ bezeichne $\mathrm{N}_G(v) := \{u \in V : uv \in E\}$ die Menge der *Nachbarn* von v und für eine Knotenmenge $U \subseteq V$ sei $\mathrm{N}_G(U) := \cup_{v \in U} \mathrm{N}_G(v) \setminus U$. Die abgeschlossene Nachbarschaft eines Knotens bzw. einer Knotenmenge sei definiert als $\mathrm{N}_G[v] := \mathrm{N}_G(v) \cup \{v\}$ und $\mathrm{N}_G[U] := \mathrm{N}_G(U) \cup U$. Der *Grad* eines Knotens v ist gleich der Anzahl seiner Nachbarn, also $\mathrm{d}_G(v) := |\,\mathrm{N}_G(v)|$.

Ein Graph G aus k Knoten $x_1, \ldots, x_k$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ und den Kanten $\mathrm{E}(G) = \{x_i x_{i+1} : i = 1, \ldots, k-1\}$ heißt *Weg* und wird mit P_k bezeichnet. Die *Länge* des Weges ist die Anzahl seiner Kanten, also $k-1$. Ein *Kreis* ist ein Graph, der aus einem Weg und einer Kante zwischen den beiden Endknoten gebildet wird. Der Kreis aus k Knoten wird mit C_k bezeichnet.

Der *vollständige Graph* auf $n = |V|$ Knoten, das heißt $E(G) = \binom{V}{2}$, wird mit K_n bezeichnet.

Der *Abstand* $\mathrm{d}_G(u, v)$ zweier Knoten $u, v \in V$ sei definiert als die Länge des kürzesten Weges zwischen u und v. Falls kein Weg zwischen u und v

existiert, wird $\mathrm{d}_G(u, v) = \infty$ gesetzt.

Ein *Matching* auf einem Graphen G ist eine Menge $M \subseteq \binom{V}{2}$ von disjunkten Kanten des Graphen G. Falls jeder Knoten von G in einer Matchingkante von M vorkommt, dann heißt M *perfektes* Matching von G.

Falls für alle Knoten $u, v \in V$ ein Weg von u nach v in G existiert, dann heißt der Graph *zusammenhängend*. Alle bezüglich Untergraphenbildung maximalen zusammenhängenden Untergraphen eines Graphen werden *Komponenten* des Graphen genannt. Die Menge aller Komponenten eines Graphen G wird mit $\mathcal{C}(G)$ bezeichnet.

Ein zusammenhängender kreisfreier Graph heißt *Baum* und ein Graph, dessen Komponenten Bäume sind, wird *Wald* genannt.

Eine bijektive Abbildung $\phi : G \mapsto G'$ zwischen den Graphen G und G' heißt *Isomorphismus*, falls $\{u, v\} \in \mathrm{E}(G) \Leftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in \mathrm{E}(G')$. Falls ein solcher Isomorphismus existiert, werden die Graphen G und G' als zueinander *isomorph* bezeichnet und es wird $G \simeq G'$ geschrieben.

2 Graphen beschränkter Baumweite

2.1 Einleitung

In diesem Kapitel sollen Graphen beschränkter Baumweite auf F-Unabhängigkeit untersucht werden. Viele im Allgemeinen NP-vollständige Probleme können auf Graphen beschränkter Baumweite in Polynomialzeit entschieden werden. Der Ansatz, ein Problem unter Ausnutzung der beschränkten Baumweite des Graphen zu lösen, wird in der Literatur als *dynamische Programmierung* bezeichnet. Eine Übersicht über die allgemeine Vorgehensweise findet sich in [4].

Unter Verwendung eines Resultats aus der Literatur [7] lässt sich die Existenz eines linearen Algorithmus zeigen, welcher für gegebenes k entscheidet, ob $\alpha_F(G) \geq k$ ist. Der Hauptteil dieses Kapitels wird sich dann mit der Konstruktion eines Algorithmus befassen, welcher eine größte F-unabhängige Menge von G in linearer Laufzeit findet.

2.2 Definition und Literatur

Definition 1 (Baumzerlegung, Baumweite)**.** Eine *Baumzerlegung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Paar $(W \subseteq \mathcal{P}(V), T = (W, K))$ mit einer Familie W von Teilmengen von V und einem Baum T, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\bigcup_{X \in W} X = V$.
2. Für alle Kanten $uv \in E$ existiert ein $X \in W$ mit $u, v \in X$.
3. Für alle Wege $P \subseteq T$ und alle $Y \in \mathrm{V}(P)$ gilt $X \cap X' \subseteq Y$, wobei X und X' die Endknoten des Weges P sind.

Ein $X \in W$ wird im folgenden auch als *Behälter* bezeichnet.

Die *Baumweite* einer Baumzerlegung $(W \subseteq \mathcal{P}(V), T = (W, K))$ ist definiert als $\max_{X \in W} |X| - 1$. Die *Baumweite* $\mathrm{tw}(G)$ eines Graphen G ist die minimale Baumweite aller Baumzerlegungen von G.

Für einen Untergraphen $T' \subseteq T$ wird mit

$$G[T'] := G\left[\cup_{X \in \mathrm{V}(T')} X\right]$$

der in G durch die Vereinigung aller Behälter des Untergraphen T' induzierte Untergraph bezeichnet. Falls T' zusammenhängend, also ein Baum ist, dann ist T' eine Baumzerlegung von $G[T']$.

Da in der Definition der Baumzerlegung gefordert ist, dass jede Kante e von G in einem Behälter $X \in W$ enthalten ist, folgt sofort $G = \cup_{X \in W} G[X]$. Das heißt der Graph G lässt sich aus $|W|$ seiner Untergraphen zusammensetzen, wobei jeder dieser Untergraphen höchstens $\mathrm{tw}(G) + 1$ Knoten hat.

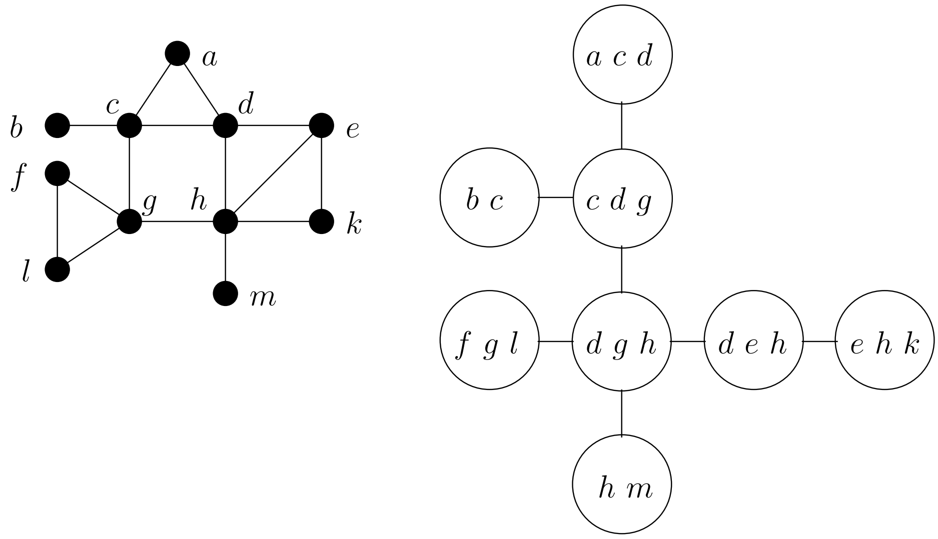


Abbildung 1: Ein Graph und eine Baumzerlegung mit Baumweite 2

Ist ein Behälter $X \in W$ gegeben und sind $T_1, \dots, T_k$ die Komponenten von $T - X$, dann sind diese Komponenten wieder Bäume und damit Baumzerlegungen der Graphen $G[T_1], \dots, G[T_k]$. Es gilt

$$G = G[X] \cup G[T_1] \cup \dots \cup G[T_k].$$

Die folgende Beobachtung liefert zwei Eigenschaften, welche sicherstellen, dass sich die Untergraphen $G[X]$ und $G[T_1], \dots, G[T_k]$ jeweils nur in einer kleinen Menge überschneiden. Damit ist jeder Behälter $X \in W$ in gewisser Weise ein Trenner des Graphen G und kann somit genutzt werden, um das Problem, eine größte F-unabhängige Teilmenge zu bestimmen, in einzelne Teilprobleme zu zerlegen (Abbildung 2).

Beobachtung 1.

a) *Sei $X \in W$, $T' \in \mathcal{C}(T - X)$ und $X' \in \mathrm{V}(T') \cap \mathrm{N}_T(X)$. Dann gilt*

$$\mathrm{V}(G[T']) \cap X \subseteq X'.$$

b) *Sei $X \in W$, $T_1, T_2 \in \mathcal{C}(T - X)$ mit $T_1 \neq T_2$. Dann gilt*

$$\mathrm{V}(G[T_1]) \cap \mathrm{V}(G[T_2]) \subseteq X.$$

Beweis.

zu a) Sei $x \in \mathrm{V}(G[X]) \cap \mathrm{V}(G[T'])$, das heißt es existiert ein $Y \in \mathrm{V}(T')$ mit $x \in Y$. Da aber dann X' auf dem Weg von X nach Y in T liegt, folgt $x \in X'$.

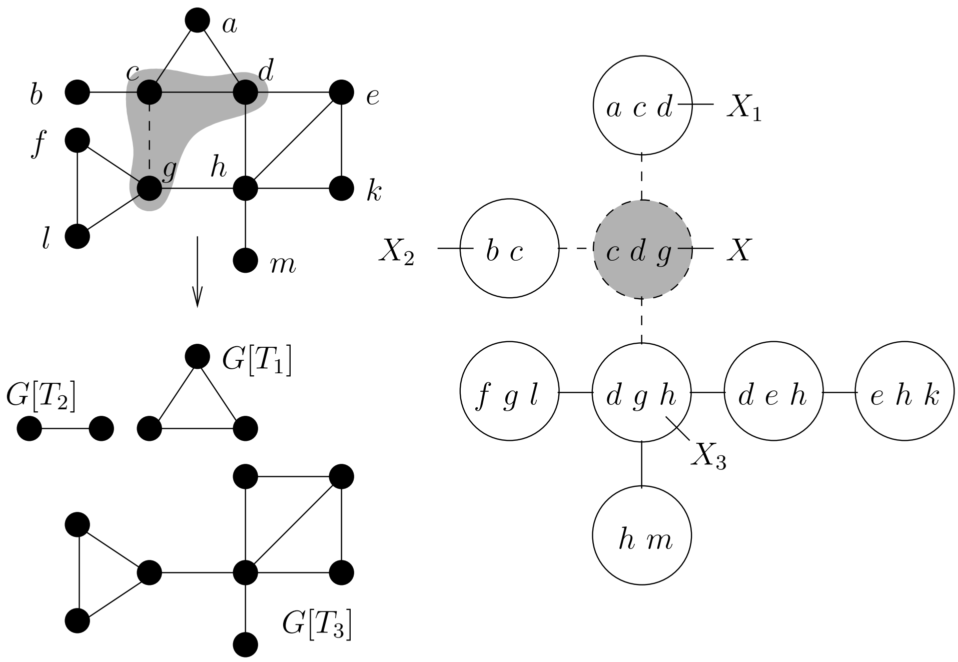


Abbildung 2: Der Behälter X zerlegt den Graphen G. Die Untergraphen $G[T_1], G[T_2], \ldots, G[T_k]$ überschneiden sich nur in X.

zu b) Sei $x \in \mathrm{V}(G[T_1]) \cap \mathrm{V}(G[T_2])$. Dann existieren $Y_1 \in \mathrm{V}(T_1)$ und $Y_2 \in \mathrm{V}(T_2)$ mit $x \in Y_1 \cap Y_2$. Da X auf dem Weg von Y_1 nach Y_2 liegt, folgt $x \in X$.

$\square$

Die Beobachtung 1 liefert nun eine sinnvolle Reihenfolge, in der die Untergraphen $G[X] : X \in W$ zusammengesetzt werden können, so dass die Ansatzstelle möglichst klein bleibt.

Folgerung 1. *Sei $X \in W$ und $T_1, \ldots, T_k$ seien die Komponenten von $T - X$. Es sei $G_0 = G[X]$ und $G_i = G_{i-1} \cup G[T_i]$ für $i = 1, \ldots, k$. Dann ist $G_k = G$ und $\mathrm{V}(G_{i-1}) \cap \mathrm{V}(G[T_i]) = X \cap X_i$ für $i = 1, \ldots, k$, wobei $X_i \in N_T(X) \cap \mathrm{V}(T_i)$ der Nachbar von X in T_i ist.*

Ein rekursives Anwenden dieser Regel liefert ein Schema wie in Abbildung 3. Die Untergraphen $G[X] : X \in W$ werden entlang der Kanten des Baumes T zusammengesetzt.

Die Idee eines Algorithmus, welcher eine größte F-unabhängige Menge findet, beruht nun darauf, für jeden Behälter nur eine beschränkte Anzahl an Informationen mitzuführen, so dass nach dem Zusammensetzen der Untergraphen die Information für den Gesamtgraph zur Verfügung steht. Dazu wird später eine spezielle Signatur von Graphen eingeführt.

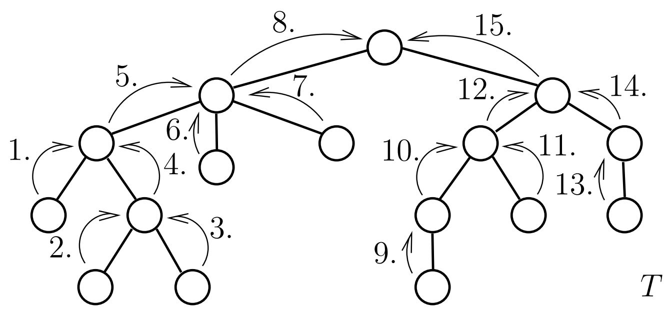


Abbildung 3: Die Vereinigung aller durch Behälter der Baumzerlegung induzierten Untergraphen liefert den gesamten Graph

Zunächst stellt sich aber noch die Frage, wie schwer es ist, für einen Graphen G eine konkrete Baumzerlegung zu finden. Für ein gegebenes, zur Eingabe gehöriges t, ist es NP-schwer zu entscheiden, ob $\operatorname{tw}(G) \leq t$ [1].

Für Graphen beschränkter Baumweite findet sich jedoch in [2] das folgende Resultat, welches hier nur zitiert wird:

Satz 1 (Bodlaender)**.** *Für eine gegebene Konstante t (das heißt t gehört nicht zur Eingabe) existiert ein Algorithmus mit Laufzeit $\mathrm{O}(|\mathrm{V}(G)|+|\mathrm{E}(G)|)$, welcher erkennt, ob die Baumweite eines Graphen G höchstens t ist, und falls ja, eine Baumzerlegung von G mit Baumweite höchstens t liefert.*

Es sei vermerkt, dass der Algorithmus für praktische Anwendungen zu langsam ist [10]. In [3] findet sich eine Auflistung von Heuristiken, welche obere bzw. untere Schranken erfüllen, sowie exakte Algorithmen für kleines t. Da diese Arbeit jedoch theoretischer Natur ist, genügt der Algorithmus von Bodlaender, um für Graphen beschränkter Baumweite die konkrete Baumzerlegung als gegeben vorauszusetzen.

2.3 Existenz eines Algorithmus mit linearer Laufzeit

Courcelle hat die Komplexität von in verschiedenen Logiken formulierten graphentheoretischen Problemen eingehend untersucht. Von besonderer Bedeutung sind an dieser Stelle die Resultate aus [6] und [7].

Satz 2 (Courcelle)**.** *Sei G ein Graph beschränkter Baumweite. Dann ist jede Eigenschaft von G, welche sich monadischer Prädikatenlogik zweiter Stufe formulieren lässt, in Zeit $\mathrm{O}(|\mathrm{V}(G)| + |\mathrm{E}(G)|)$ entscheidbar.*

Die monadische Prädikatenlogik zweiter Stufe ist eine Erweiterung der Prädikatenlogik erster Stufe, in welcher zusätzlich Quantoren über Mengen von Variablen erlaubt sind.

Courcelle hat dabei zunächst in [6] gezeigt, dass das Entscheidungsproblem für Hypergraphen spezieller Struktur linear ist. In [7] zeigt er dann, dass sich diese Struktur aus der Baumzerlegung gewinnen lässt. Mit dem Resultat von Satz 1 folgt Satz 2 in obiger Form.

Es soll nun das folgende Entscheidungsproblem in monadischer Prädikatenlogik zweiter Stufe formuliert werden:

Problem 1. *Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit Baumweite höchstens t. Bestimme für gegebenes k, ob G eine F-unabhängige Menge S mit $|S| \geq k$ enthält.*

Der Graph G sei dabei durch die Menge seiner Knoten V und Kanten E gegeben, wobei durch die Kanten eine Relation *edge* auf der Menge der Knoten definiert sei. Für F sei die Menge der Knoten $\mathrm{V}(F) = \{f_1, \ldots, f_n\}$ und Kanten $\mathrm{E}(F) = \{f_{i_1} f_{j_1}, \ldots, f_{i_m} f_{j_m}\}$. Das Problem lässt sich als Entscheidungsproblem in monadischer Prädikatenlogik zweiter Stufe formulieren:

$$\exists S[(|S| \geq k) \wedge (S\ F\text{-unabhängig})]$$

$|S| \geq k$ ist äquivalent zu der Aussage, dass S mindestens k paarweise disjunkte Elemente enthält:

$$\exists s_1 \ldots \exists s_k((s_1 \in S \wedge \cdots \wedge s_k \in S) \wedge (s_1 \neq s_2 \wedge s_1 \neq s_3 \wedge \cdots))$$

Die F-Unabhängigkeit der Menge S ist äquivalent dazu, dass jeder aus n Knoten induzierte Untergraph von G keinen zu F isomorphen Untergraphen enthält:

$$\begin{aligned}\forall s_1 \ldots \forall s_n((s_1 \in S \wedge \cdots \wedge s_n \in S) \wedge (s_1 \neq s_2 \wedge s_1 \neq s_3 \wedge \cdots) \rightarrow \\ \neg(\mathrm{edge}(s_{i_1}, s_{j_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{edge}(s_{i_m}, s_{j_m})))\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich:

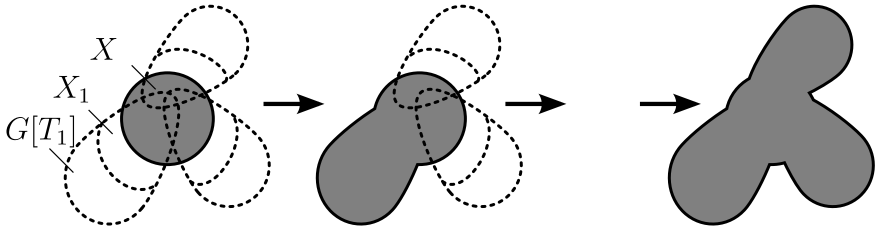
$$\begin{aligned}\exists S[\exists s_1 \ldots \exists s_k((s_1 \in S \wedge \cdots \wedge s_k \in S) \wedge (s_1 \neq s_2 \wedge s_1 \neq s_3 \wedge \cdots)) \wedge \\ \forall s_1 \ldots \forall s_n((s_1 \in S \wedge \cdots \wedge s_n \in S) \wedge (s_1 \neq s_2 \wedge s_1 \neq s_3 \wedge \cdots) \rightarrow \\ \neg(\mathrm{edge}(s_{i_1}, s_{j_1}) \wedge \cdots \wedge \mathrm{edge}(s_{i_m}, s_{j_m})))]\end{aligned}$$

Mit Satz 2 folgt nun, dass ein Algorithmus existiert, welcher Problem 1 in Zeit $\mathrm{O}(|\mathrm{V}(G)| + |\mathrm{E}(G)|)$ entscheidet.

2.4 Grundriss des Algorithmus

In diesem Abschnitt soll ein Algorithmus angegeben werden, welcher nicht nur Problem 1 in Zeit $\mathrm{O}(|\mathrm{V}(G)| + |\mathrm{E}(G)|)$ entscheidet, sondern sogar eine größte F-unabhängige Menge von G bestimmt.

Nach Folgerung 1 kann der Graph G mit einer Baumzerlegung T aus den Untergraphen $G[X]$ und $G[T_1], \ldots, G[T_k]$ zusammengesetzt werden, wobei $T_1, \ldots, T_k$ die Komponenten von $T - X$ mit einem Behälter $X \in \mathrm{V}(T)$ sind. Es sei auch hier $G_0 := G[X]$ und $G_i := G_{i-1} \cup G[T_i]$ für $i = 1, \ldots, k$. Wird ein neuer Untergraph $G[T_i]$ zu G_i hinzugenommen, dann ist der Durchschnitt mit G_i beschränkt in der Baumweite des Graphen G (Abbildung 4).



$G_0 = G[X]$ $\quad$ $G_1 = G[X] \cup G[T_1]$ $\quad$ $G_k = G = G[X] \cup G[T_1] \cup \cdots \cup G[T_k]$

Abbildung 4: Zusammenfügen der Untergraphen zum Graphen G

Es soll nun eine möglichst kleine (und vor allem in $\mathrm{tw}(G)$ und F beschränkte) Informationsmenge für diese Untergraphen bestimmt werden, mit welcher eine größte F-unabhängige Menge auf G gefunden werden kann.

Jeweils eine größte F-unabhängige Menge aus den Untergraphen zu kennen, ist offensichtlich nicht ausreichend. Die Vereinigung dieser Mengen ist im Allgemeinen keine F-unabhängige Menge in der Vereinigung der Graphen.

Da jeder Schritt in der Vereinigungsbildung prinzipiell nach dem gleichen Schema abläuft, sei das folgende Teilproblem betrachtet:

Problem 2. *Für jeden Graphen G und jede Teilmenge $X \subseteq G$ ist eine Funktion*

$$h_F^{G,X} : \mathcal{P}(\mathrm{V}(G)) \mapsto D_F^{G,X}$$

mit einem zunächst beliebigen Wertebereich $D_F^{G,X}$ gesucht, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

(I) Wenn $h_F^{G,X}(S \subseteq \mathrm{V}(G))$ bekannt ist, dann auch, ob die Menge S F-unabhängig in G ist.

(A) Es existiert eine Funktion

$a : D_F^{G,X} \mapsto \mathcal{P}(X)$, *so dass*

$$a\left(h_F^{G,X}(S)\right) = S \cap X \qquad \text{für alle } S \subseteq \mathrm{V}(G).$$

Das heißt aus $h_F^{G,X}(S)$ kann der Durchschnitt $S \cap X$ abgelesen werden.

(B) Für $Y \subseteq X$ existiert eine Funktion

$$b^{X,Y} : D_F^{G,X} \mapsto D_F^{G,Y} \text{ mit}$$
$$h_F^{G,Y}(S) = b^{X,Y}\left(h_F^{G,X}(S)\right) \qquad \text{für alle } S \subseteq \mathrm{V}(G).$$

(C) Gegeben seien die Graphen G_1 und G_2 mit $X_1 \subseteq \mathrm{V}(G_1)$, $X_2 \subseteq \mathrm{V}(G_2)$ und $\mathrm{V}(G_1) \cap \mathrm{V}(G_2) \subseteq X_1 \cap X_2$. Es sei $G = G_1 \cup G_2$ und $X = X_1 \cup X_2$. Dann existiert eine Funktion

$$c : D^{12} \mapsto D_F^{G,X} \text{ mit}$$
$$h_F^{G,X}(S_1 \cup S_2) = c\left(h_F^{G_1,X_1}(S_1), h_F^{G_2,X_2}(S_2)\right)$$
$$\text{für alle } S_1 \subseteq \mathrm{V}(G_1), S_2 \subseteq \mathrm{V}(G_2) \text{ mit } S_1 \cap X_2 = S_2 \cap X_1.$$

Dabei sei

$$D^{12} := \left\{(Q_1, Q_2) \in D_F^{G_1,X_1} \times D_F^{G_2,X_2} : a(Q_1) \cap X_2 = a(Q_2) \cap X_1\right\}.$$

Die Forderung $S_1 \cap X_2 = S_2 \cap X_1$ ist keine Einschränkung an die Menge $S = S_1 \cup S_2$, da jede Menge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ in zwei solche Mengen S_1 und S_2 zerfällt.

(II) Die Größe des Wertebereichs $D_F^{G,X}$ hängt nur von X und F, nicht aber von der Größe des Graphen G ab. Alle Funktionswerte in (A), (B) und (C) können in konstanter Zeit berechnet werden.

Wurde eine Größe $h_F^{G,X}$ gefunden, welche Problem 2 löst, dann kann ein rekursiver Algorithmus angegeben werden, welcher eine größte F-unabhängige Menge auf G findet. Die Größe $h_F^{G,X}(S)$ kann als *Signatur* der Menge S aufgefasst werden. Die Signatur gibt an, ob die Menge S selbst F-unabhängig ist und welche Mengen S' aus einem Graphen G' (welcher mit G einen hinreichend kleinen Durchschnitt hat) zu der Menge S hinzugenommen werden können, so dass $S \cup S'$ F-unabhängig bleibt.

Es genügt nun, für jede mögliche Signatur aus $D_F^{G,X}$ eine größte Menge S mit dieser Signatur zu bestimmen. Dazu sei

$$g_F^{G,X} : D_F^{G,X} \mapsto \mathbb{N}_0 \cup \{-\infty\}$$

die Funktion, welche jeder Signatur $Q \in D_F^{G,X}$ die Größe der größten Menge S mit der Signatur Q zuordnet, also

$$g_F^{G,X}(Q) = \max\left\{|S| : S \subseteq \mathrm{V}(G) \text{ mit } h_F^{G,X}(S) = Q\right\}.$$

Dabei sei $g_F^{G,X}(Q) := -\infty$, falls keine Menge S mit der Signatur Q existiert. Weiterhin sei

$$s_F^{G,X} : D_F^{G,X} \mapsto \mathcal{P}(\mathrm{V}(G))$$

die Funktion, welche jeder Signatur Q eine größte Menge $S \setminus X$ zuordnet. Das heißt

$$s_F^{G,X}(Q) = S \setminus X \qquad \text{mit } S \subseteq (\mathrm{V}(G)),\ h_F^{G,X}(S) = Q \text{ und } |S| = g_F^{G,X}(Q).$$

Falls keine Menge S mit der Signatur Q existiert, dann geht dies bereits aus der Größe $g_F^{G,X}(Q)$ hervor. Es wird in diesem Fall $s_F^{G,X}(Q) = \emptyset$ gesetzt.

Die Menge X wird abgezogen, damit sich die Mengen leichter vereinigen lassen. Der Durchschnitt zweier Mengen gleicher Signatur mit X ist identisch und kann nach (A) aus der Signatur ermittelt werden.

Falls $\left(g_F^{G,X}, s_F^{G,X}\right)$ bekannt ist, dann auch eine größte F-unabhängige Menge von G. Da die Menge der möglichen Signaturen nach (II) beschränkt ist, kann in konstanter Zeit ein $Q_{max} \in D_F^{G,X}$ ermittelt werden, so dass $g_F^{G,X}(Q_{max})$ maximal ist. Die Menge $S = s_F^{G,X}(Q_{max}) \cup a(Q_{max})$ ist dann eine größte F-unabhängige Menge in G.

Der folgende rekursive Algorithmus erwartet als Eingabe einen Graphen $G = (V, E)$, eine Baumzerlegung $(W \subseteq \mathcal{P}(V), T = (W, K))$ gegeben durch den Baum T und einen Behälter $X \in W$. Berechnet wird das Funktionspaar $\left(g_F^{G,X}, s_F^{G,X}\right)$. Falls nur die Größe der größten F-unabhängigen Menge und nicht die Menge selbst gesucht ist, dann kann der Algorithmus leicht so angepasst werden, dass nur $g_F^{G,X}$ berechnet wird.

Die Mengen, welche die Funktionswerte von $s_F^{G,X}$ bilden, seien so gespeichert, dass sich die Vereinigung von disjunkten Mengen in konstanter Zeit berechnen lässt. Zum Beispiel können die Mengen als verkettete Listen gespeichert werden.

Algorithmus 1. $\mathbf{maxsig}_F(G, T, X)$

- Sei $G_0 = G[X]$. Da die Größe des Graphen $G[X]$ nur von der Baumweite $\mathrm{tw}(G)$ abhängt, kann

  $$(g_0, s_0) = \left(g_F^{G_0,X}, s_F^{G_0,X}\right)$$

  in konstanter Zeit durch vollständige Enumeration berechnet werden.

- Seien $T_1, \ldots, T_k$ die Komponenten von $T - X$ und $\{X_1, \ldots, X_k\}$ die Menge der Nachbarn von X in T, so dass $X_i \in \mathrm{V}(T_i)$ für $i = 1, \ldots, k$

- Falls X keine Nachbarn hat, gib (g_0, s_0) zurück.

- Sonst für $i = 1, \ldots, k$

  - Sei $G_i = G_{i-1} \cup G[T_i]$.
  - Berechne für den Untergraphen $G[T_i]$ die Funktionen

    $$\left(g_F^{G[T_i],X_i}, s_F^{G[T_i],X_i}\right) = \mathbf{maxsig}_F(G[T_i], T_i, X_i)$$

    durch rekursives Aufrufen des Algorithmus

– Verkleinere die Ansatzstelle von X_i auf $X_i \cap X$:
Die Funktionen

$$g_i' = g_F^{G[T_i],X_i \cap X} \qquad \text{und} \qquad s_i' = s_F^{G[T_i],X_i \cap X}$$

können mit der Bedingung (B) wie folgt berechnet werden:
Bestimme für jedes $Q' \in D_F^{G[T_i],X_i \cap X}$ ein $Q \in D_F^{G[T_i],X_i}$ mit $b^{X_i,X_i \cap X}(Q) = Q'$, so dass

$$g_F^{G[T_i],X_i}(Q) \geq g_F^{G[T_i],X_i}(Q^*)$$

für alle $Q^* \in D_F^{G[T_i],X_i}$ mit $b^{X_i,X_i \cap X}(Q^*) = Q'$. Setze

$$g_i'(Q') = g_F^{G[T_i],X_i}(Q)$$

und

$$s_i'(Q') = s_F^{G[T_i],X_i}(Q) \cup (a(Q) \setminus a(Q')).$$

Das Anhängen der Knoten $a(Q) \setminus a(Q')$, welche in der Signatur Q' nicht mehr vorkommen, benötigt nur konstante Zeit.

– Kombiniere die auf G_{i-1} und $G[T_i]$ gegebenen Informationen:
Aus (g_{i-1}, s_{i-1}) und (g_i', s_i') kann (g_i, s_i) nach (A) berechnet werden:
Bestimme für jede Signatur $Q \in D_F^{G_i,X}$ Signaturen $Q_1 \in D_F^{G_{i-1},X}$ und $Q_2 \in D_F^{G[T_i],X_i \cap X}$ mit $c(Q_1, Q_2) = Q$, so dass

$$g_{i-1}(Q_1) + g_i'(Q_2)$$

maximal ist, das heißt

$$g_{i-1}(Q_1) + g_i'(Q_2) \geq g_{i-1}(Q_1') + g_i'(Q_2')$$

für alle $Q_1' \in D_F^{G_{i-1},X}$ und alle $Q_2' \in D_F^{G[T_i],X_i \cap X}$ mit $c(Q_1', Q_2') = Q$. Setze

$$g_i(Q) = g_{i-1}(Q_1) + g_i'(Q_2) - |a(Q)|.$$

Die Anzahl Knoten $|a(Q)|$ muss abgezogen werden, da diese sonst doppelt gezählt werden. Setze

$$s_i(Q) = s_{i-1}(Q_1) \cup s_i'(Q_2).$$

Da die Mengen $s_{i-1}(Q_1)$ und $s_i'(Q_2)$ disjunkt sind, kann die Vereinigung in konstanter Zeit gebildet werden.

- Gib $(g_k, s_k) = \left(g_F^{G,X}, s_F^{G,X}\right)$ zurück.

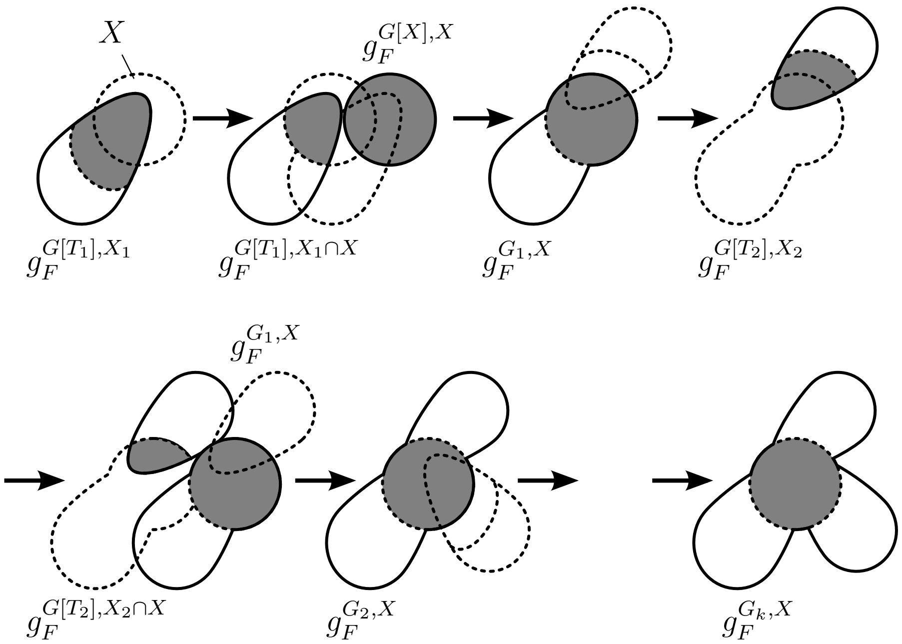


Abbildung 5: (Zu Algorithmus 1) Die Funktion $g_F^{G,X}$ berechnet sich aus $g_F^{G[X],X}$ und $g_F^{G[T_1],X_1}, \ldots, g_F^{G[T_k],X_k}$

Bemerkung 1. Der Algorithmus $\mathbf{maxsig}_F(G, T, X)$ wird zur Berechnung von $\left(g_F^{G,X}, s_F^{G,X}\right)$ für jeden Behälter der Baumzerlegung genau einmal aufgerufen. Da die Anzahl möglicher Signaturen aus $D_F^{G,X}$ nur von F und X und damit der Baumweite von G abhängt, wird jeder Schritt in konstanter Zeit ausgeführt. Die Laufzeit des Algorithmus ist also $\mathrm{O}(|W|)$ und damit $\mathrm{O}(|\operatorname{V}(G)|)$.

Obwohl der Algorithmus rekursiv ist und teilweise mehrere Berechnungsschritte zwischengespeichert werden müssen, bleibt der Speicherverbrauch linear. Die Anzahl aller möglichen Signaturen ist beschränkt und jede zu einer Signatur gehörende Menge hat höchstens die Größe des jeweils besuchten Unterbaums T' von T (bzw. genauer des dadurch auf G induzierten Graphen $G[T']$). Da sich die rekursiv besuchten Unterbäume aber nicht überschneiden, bleibt die Größe aller gespeicherten Mengen in $|\operatorname{V}(G)|$ beschränkt.

Es genügt also, Problem 2 zu lösen, um einen linearen Algorithmus zu kennen, welcher eine größte F-unabhängige Menge findet. Der Konstruktion einer geeigneten Signatur $h_F^{G,X}$ widmet sich der nächste Abschnitt.

2.5 F, X-Signatur eines Graphen

2.5.1 Problemstellung und Bezeichnungen

Gesucht ist im folgenden eine Signatur $h_F^{G,X}(S \subseteq \mathrm{V}(G))$ welche die Forderungen von Problem 2 erfüllt.

Der Graph G ergebe sich aus der Vereinigung zweier Graphen G_1 und G_2. Für die Graphen G, G_1 und G_2 sind dabei stets ausgezeichnete Teilmengen $X \subseteq \mathrm{V}(G)$, $X_1 \subseteq \mathrm{V}(G_1)$ und $X_2 \subseteq \mathrm{V}(G_2)$ gegeben, wobei die Menge X die Vereinigung der Mengen X_1 und X_2 ist.

Die Menge X bzw. die Mengen X_1 und X_2 sind genau die Schnittmengen, in denen sich die Graphen G bzw. G_1 und G_2 bei der Vereinigungsbildung mit weiteren Graphen überschneiden dürfen. Dabei erfüllen die Graphen G_1 und G_2 stets die Bedingung

$$\mathrm{V}(G_1) \cap \mathrm{V}(G_2) \subseteq X_1 \cap X_2.$$

Mit S, S_1 und S_2 werden im folgenden Mengen aus G, G_1 und G_2 bezeichnet, welche auf F-Unabhängigkeit getestet werden sollen (bzw. deren Signaturen bestimmt werden sollen). Die Vereinigung der Mengen S_1 und S_2 sei S. Da diese Mengen später durch ihre Untergraphen charakterisiert werden sollen, ist es notwendig, dass

$$G[S] = G_1[S_1] \cup G_2[S_2]$$

gilt, damit aus der Kenntnis der Untergraphen von S_1 und S_2 die Kenntnis der Untergraphen von S folgt. Um dies im Allgemeinen sicher zustellen, muss

$$S_1 = S \cap \mathrm{V}(G_1) \qquad \text{und} \qquad S_2 = S \cap \mathrm{V}(G_2)$$

gelten (Abbildung 6).

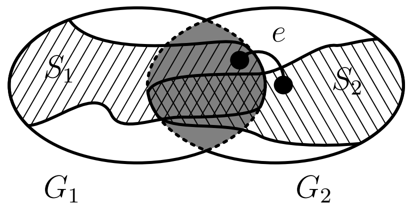


Abbildung 6: Die Kante e liegt weder im Graphen $G_1[S_1]$ noch $G_2[S_2]$, wohl aber in $G[S]$

Diese Bedingung ist wegen $S = S_1 \cup S_2$ und $\mathrm{V}(G_1) \cap \mathrm{V}(G_2) \subseteq X_1 \cap X_2$ äquivalent zu

$$S_1 \cap X_2 = S_2 \cap X_1. \tag{1}$$

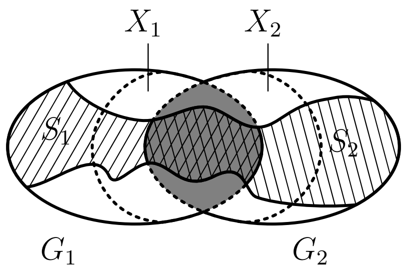


Abbildung 7: Zusammenhang der Größen G_1, X_1, S_1 und G_2, X_2, S_2

Bei allen weiteren Symbolen wird die Konvention eingehalten, dass sich Größen ohne Index auf den Graphen G und Größen mit Index 1 oder 2 auf die Graphen G_1 und G_2 beziehen. Symbole ohne Index werden aber zugleich auch als Variable von Funktionen verwendet, um die Anzahl der Symbole gering zu halten.

Hängt eine Größe von einem Graphen G ab, dann wird G als hochgestellter Index verwendet. Die Menge X kommt ebenfalls als hochgestellter Index vor.

Für eine Menge Y sind induzierte Untergraphen von G bisher nur für $Y \subseteq \mathrm{V}(G)$ definiert. Falls $Y \nsubseteq \mathrm{V}(G)$, dann sei $G[Y] := G[Y \cap \mathrm{V}(G)]$.

2.5.2 Äquivalenzklassen von Untergraphen

Wird zunächst einmal die Forderung (II) außer Acht gelassen, dann lässt sich leicht ein $h^{G,X}$ finden, welches die Forderungen (I), (A), (B) und (C) aus Problem 2 erfüllt.

Sei $\mathcal{K}(G)$ die Menge der Untergraphen von G und

$$h^G : \mathcal{P}(\mathrm{V}(G)) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{K}(G))$$

die Funktion, welche jeder Teilmenge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ die Menge aller Untergraphen des induzierten Untergraphen $G[S]$ zuordnet, also

$$h^G(S) := \mathcal{K}(G[S]).$$

Für jeden Untergraphen $U \subseteq G[S]$ existieren Untergraphen $U_1 \subseteq G_1[S_1]$ und $U_2 \subseteq G_2[S_2]$ mit $U = U_1 \cup U_2$. Damit ergibt sich:

$$h^G(S) = \left\{U : U = U_1 \cup U_2 \text{ mit } U_1 \in h^{G_1}(S_1),\ U_2 \in h^{G_2}(S_2)\right\}.$$

Da es nur auf die F-Unabhängigkeit der induzierten Untergraphen von G ankommt, reicht es aus, die Untergraphenlisten auf solche Untergraphen einzuschränken, welche zu einem Untergraphen von F isomorph sind.

Es sei $\mathcal{K}_F(G)$ die Menge aller Untergraphen von G, welche zu einem Untergraphen von F isomorph sind und

$$h_F^G(S) := \mathcal{K}_F(G[S]).$$

Die Vereinigung zweier Untergraphen

$$U_1 \in \mathcal{K}_F(G_1[S_1]) \qquad \text{und} \qquad U_2 \in \mathcal{K}_F(G_2[S_2])$$

ist nicht zwingend zu einem Untergraphen von F isomorph. Falls $\mathrm{V}(U_1) \cap X_2 = \mathrm{V}(U_2) \cap X_1$ und $U = U_1 \cup U_2$ zu einem Untergraphen von F isomorph ist, also $U \in \mathcal{K}_F(G[S])$, dann wird

$$U = U_1 \star U_2 \tag{2}$$

geschrieben. Die Bedingung $\mathrm{V}(U_1) \cap X_2 = \mathrm{V}(U_2) \cap X_1$ ist keine Einschränkung an U, da jeder Untergraph U in zwei solche Graphen zerfällt.

Es gilt dann

$$h_F^G(S) = \left\{ U : U = U_1 \star U_2 \text{ mit } U_1 \in h_F^{G_1}(S_1),\ U_2 \in h_F^{G_2}(S_2) \right\}.$$

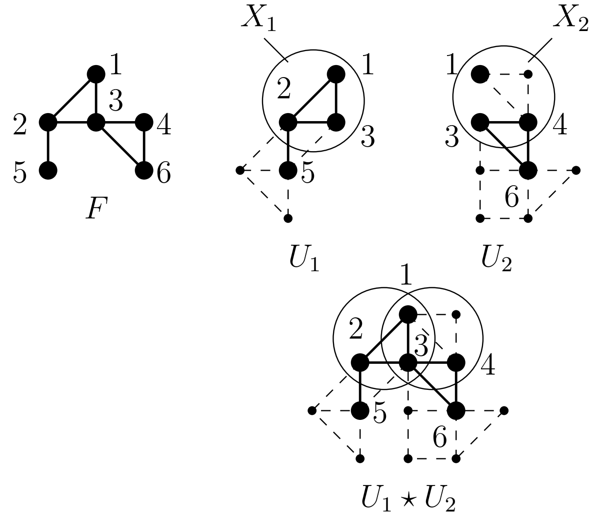


Abbildung 8: Es sind nur diejenigen Untergraphen U_1 und U_2 zu betrachten, deren Vereinigung wieder zu einem Untergraphen von F isomorph ist.

Mit dieser Beziehung erfüllt die Funktion $h_F^G(S)$ die Bedingung (C) aus Problem 2 und die Bedingungen (I) und (A) sind offensichtlich ebenfalls erfüllt. Die Bedingung (B) gilt trivialerweise, da $h_F^G(S)$ nicht von X abhängt.

Schwierigkeiten bereitet Die Bedingung (II). Die Anzahl aller Untergraphen $\mathcal{K}_F(G[S])$ wächst immer noch exponentiell mit der Größe des Graphen G.

Aus der bisher noch nicht verwendeten Bedingung $\mathrm{V}(G_1) \cap \mathrm{V}(G_2) \subseteq X_1 \cap X_2$ folgt jedoch für jeden Untergraphen $U \subseteq G$, dass sich die jeweils in G_1 und G_2 liegenden Teile $U_1 = U \cap G_1$ und $U_2 = U \cap G_2$ ebenfalls nur in $X_1 \cap X_2$ überschneiden. Es sollte daher genügen, die Untergraphen aus $\mathcal{K}_F(G_1[S_1])$ und $\mathcal{K}_F(G_2[S_2])$ nur auf den Mengen X_1 und X_2 zu unterscheiden.

Auf der Menge $\mathcal{K}_F(G)$ sei folgende Äquivalenzrelation definiert:

Definition 2. Zwei Untergraphen $U \in \mathcal{K}_F(G)$ und $U' \in \mathcal{K}_F(G)$ heißen auf X äquivalent, geschrieben $U \sim_X U'$, falls $U[X] = U'[X]$ ist und ein Isomorphismus $\varphi : U \mapsto U'$ mit $\varphi\big|_{U[X]} = \mathrm{id}\big|_{U[X]}$ existiert.

Zwei solche Untergraphen sind also äquivalent, falls sie zueinander isomorph und auf X identisch sind (Abbildung 9). Das heißt, es ist egal, wie die Knoten eines Untergraphen $U \subseteq G$, welche außerhalb der Menge X liegen, bezeichnet sind.

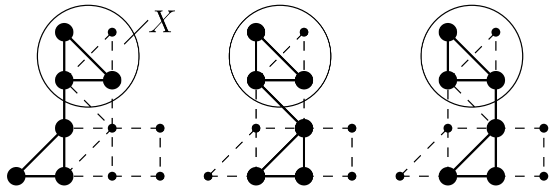


Abbildung 9: Die Untergraphen U_1 und U_2 sind äquivalent, U_2 und U_3 hingegen nicht.

Für einen Untergraphen U sei die von U bezüglich $\sim_X$ erzeugte Äquivalenzklasse mit $[U]^X$ oder, falls klar ist welche Menge X gemeint ist, einfach mit $[U]$ bezeichnet. Es sei $\mathcal{K}_F^X(G)$ die Menge aller Äquivalenzklassen auf $\mathcal{K}_F(G)$.

Die Anzahl aller Untergraphen von F (bis auf Isomorphie) hängt nur von F selbst ab. Für jeden dieser Untergraphen hängt die Anzahl seiner verschiedenen Einbettungen in G, so dass nur Knoten auf X unterschieden werden, nur von X ab. Somit ist die Anzahl aller Äquivalenzklassen $\mathcal{K}_F^X(G)$ beschränkt in einer Konstante, die nur von F und X abhängt.

Eine neue Funktion $h_F^{G,X} : \mathcal{P}(\mathrm{V}(G)) \mapsto \mathcal{P}\left(\mathcal{K}_F^X(G)\right)$ kann nun wie folgt definiert werden:

$$h_F^{G,X}(S) = \left\{C : C \in \mathcal{K}_F^X(G) \text{ und es existiert ein } U \in h_F^G(S) \text{ mit } [U]^X = C\right\}$$

Die Menge $Q = h_F^{G,X}(S)$ kann als *Signatur* der Menge S verstanden werden, welche nur die wesentlichen Informationen enthält. Aus der Signatur ist sofort ersichtlich, ob $G[S]$ eine Kopie von F enthält, das heißt ob die Menge S F-abhängig ist (Bedingung (I)).

Ist die Signatur Q für eine Menge S bekannt, dann kann $S \cap X$ direkt abgelesen werden. Für jeden Knoten x von $S \cap X$ ist $(\{x\}, \emptyset)$ ein Untergraph von $G[S]$. Da F mindestens einen Knoten enthält, ist $(\{x\}, \emptyset)$ zu einem Untergraph von F isomorph. Die Äquivalenzklasse $[(\{x\}, \emptyset)]$ (welche $(\{x\}, \emptyset)$ als einzigen Repräsentanten enthält) sei mit $[x]$ bezeichnet.

Die Funktion
$$a(Q) = \{x \in X : [x] \in Q\}$$
erfüllt dann gerade die Bedingung (A), das heißt es gilt $a(Q) = S \cap X$.

Aus $h_F^{G,X}(S)$ kann für alle $Y \subseteq X$ die Größe $h_F^{G,Y}(S)$ ermittelt werden. Da zwei Untergraphen, welche auf X identisch sind, auch auf $Y \subseteq X$ identisch sind, ist die Klasseneinteilung $\mathcal{K}_F^Y(G)$ gröber als die Klasseneinteilung $\mathcal{K}_F^X(G)$. Für eine Signatur Q und $Y \subseteq X$ sei
$$b^{X,Y}(Q) = \left\{[U]^Y : \text{ es existiert ein } U \in \mathcal{K}_F(G) \text{ mit } [U]^X \in Q\right\}.$$
Damit ist die Bedingung (B) erfüllt und es gilt
$$h_F^{G,Y}(S) = b^{X,Y}\left(h_F^{G,X}(S)\right).$$

Zu zeigen bleibt noch, wie sich $h_F^{G,X}(S)$ aus den Größen $h_F^{G_1,X_1}(S_1)$ und $h_F^{G_2,X_2}(S_2)$ berechnet.

Beobachtung 2. *Gegeben seien Untergraphen*
$$U_1, U_1' \in \mathcal{K}_F(G_1) \quad \textit{und} \quad U_2, U_2' \in \mathcal{K}_F(G_2) \quad \textit{mit}$$
$$[U_1] = [U_1'] \qquad \textit{und} \qquad [U_2] = [U_2'].$$
Falls $U_1 \star U_2$ definiert ist, dann auch $U_1' \star U_2'$ und es gilt
$$[U_1 \star U_2] = [U_1' \star U_2'].$$
Damit ist die Äquivalenzklassenbildung mit der Vereinigung der Untergraphen verträglich.

Beweis. Es sei $U = U_1 \star U_2$. Wegen $U_1[X_1] = U_1'[X_1]$ und $U_2[X_2] = U_2'[X_2]$ folgt aus $\mathrm{V}(U_1) \cap X_2 = \mathrm{V}(U_2) \cap X_1$ die notwendige Bedingung $\mathrm{V}(U_1') \cap X_2 = \mathrm{V}(U_2') \cap X_1$. Es sei $U' = U_1' \cup U_2'$.

Zu zeigen ist, dass U und U' isomorph und auf X identisch sind. Damit folgt insbesondere auch, dass U' zu einem Untergraph von F isomorph ist. Es gilt
$$U[X] = U_1[X_1] \cup U_2[X_2] = U_1'[X_1] \cup U_2'[X_2] = U'[X].$$
Wegen $U_1 \sim_X U_1'$ und $U_2 \sim_X U_2'$ existieren Isomorphismen $\varphi_1 : U_1 \mapsto U_1'$ und $\varphi_2 : U_2 \mapsto U_2'$ mit $\varphi_1\big|_{U_1[X_1]} = \mathrm{id}\big|_{U_1[X_1]}$ und $\varphi_2\big|_{U_2[X_2]} = \mathrm{id}\big|_{U_2[X_2]}$. Die Abbildung $\varphi : U \mapsto U'$ mit $\varphi|_{U_1} = \varphi_1$ und $\varphi|_{U_2} = \varphi_2$ ist dann eindeutig definiert und liefert einen Isomorphismus zwischen den Graphen U und U' mit $\varphi\big|_{U[X]} = id\big|_{U[X]}$. Die Behauptung ist damit gezeigt. $\square$

Beobachtung 2 rechtfertigt nun die folgende Definition: für $C \in \mathcal{K}_F^X(G)$, $C_1 \in \mathcal{K}_F^{X_1}(G_1)$ und $C_2 \in \mathcal{K}_F^{X_2}(G_2)$ wird

$$C = C_1 \star C_2 \tag{3}$$

geschrieben, falls Repräsentanten U, U_1 und U_2 mit $[U] = C$, $[U_1] = C_1$, $[U_2] = C_2$ und $U = U_1 \star U_2$ existieren.

Da jeder Untergraph U in Untergraphen $U_1 = U \cap G_1$ und $U_2 = U \cap G_2$ zerfällt, so dass $U = U_1 \star U_2$ gilt, zerfällt auch jede Klasse C in Klassen C_1 und C_2 mit $C = C_1 \star C_2$.

Die Funktion $c : K^{12} \mapsto \mathcal{P}\left(\mathcal{K}_F^X(G)\right)$ mit

$$K^{12} = \Big\{ (Q_1, Q_2) \in \mathcal{P}\left(\mathcal{K}_F^{X_1}(G_1)\right) \times \mathcal{P}\left(\mathcal{K}_F^{X_2}(G_2)\right) : \\ a(Q_1) \cap X_2 = a(Q_2) \cap X_1 \Big\},$$

welche gegeben ist durch

$$c(Q_1, Q_2) = \left\{ C \in \mathcal{K}_F^X(G) : C = C_1 \star C_2 \text{ mit } C_1 \in Q_1 \text{ und } C_2 \in Q_2 \right\},$$

erfüllt dann gerade die Bedingung (C), das heißt, es gilt

$$h_F^{G,X}(S) = c\left(h_F^{G_1,X_1}(S_1), h_F^{G_2,X_2}(S_2)\right).$$

Die Größe $h_F^{G,X}$ erfüllt damit alle Bedingungen von Problem 2. Jedoch wird im nächsten Abschnitt noch auf einige technische Besonderheiten eingegangen.

Im folgenden sind die bisherigen Konstruktionsschritte noch einmal zusammengefasst:

1. Für jede Teilmenge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ wird die Liste der Untergraphen von $G[S]$ betrachtet ($\to h^G(S)$)
2. Dabei reicht es, diejenigen Untergraphen in die Liste aufzunehmen, welche zu einem Untergraphen von F isomorph sind ($\to h_F^G(S)$)
3. Diese Untergraphen wiederum müssen nur auf einer Teilmenge $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ unterschieden werden ($\to h_F^{G,X}(S)$)

2.5.3 Technische Details

Die Größe $h_F^{G,X}$ erfüllt bereits alle in Problem 2 gestellten Bedingungen. Auf einige Feinheiten soll in diesem Abschnitt noch eingegangen werden:

- Die Größe $h_F^{G,X}$ ist in der Hinsicht ungeeignet, dass die Äquivalenzklassen $\mathcal{K}_F^X(G)$ vom konkreten Graphen G abhängen. Dies lässt sich durch Identifikation der Klassen mit neuen Objekten umgehen.

- Wie sich zeigt, kann die zu betrachtende Untergraphenliste eines induzierten Untergraphen $G[S]$ und damit die Signatur von S weiter vereinfacht werden.

Jeder Untergraph von G, welcher zu einem Untergraphen von F isomorph ist, kann eindeutig durch einen Isomorphismus

$$\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G$$

beschrieben werden. Ein solcher Isomorphismus wird im folgenden auch als *Einbettung* bezeichnet.

Eine solche Einbettung kann eindeutig durch ein Paar

$$(H \subseteq F, p : \mathrm{V}(H) \mapsto \mathrm{V}(G))$$

beschrieben werden, wobei $p = \phi\big|_{\mathrm{V}(H)}$ ist.

Da die Untergraphen nur auf X unterschieden werden müssen, kann die Abbildung p weiter vereinfacht werden. Es sei x_0 ein nicht zu X gehörender Knoten mit welchem alle Knoten von U identifiziert werden, welche außerhalb von X liegen.

Jedes Paar

$$(H \subseteq F, p : \mathrm{V}(H) \mapsto X\dot{\cup}\{x_0\}) \qquad \text{mit } p\big|_{p^{-1}(X)} \text{ bijektiv} \tag{4}$$

beschreibt dann eine Einbettung eindeutig bis auf Unterschiede der eingebetteten Graphen außerhalb der Knotenmenge X.

Einer Einbettung $\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G$ sei ein Paar (H, p) wie folgt zugeordnet:

Es wird $(H, p) \rhd \phi$ geschrieben, falls

$$\mathrm{V}(U) \cap X = p(\mathrm{V}(H)) \cap X \qquad \text{und} \qquad \phi\big|_{p^{-1}(X)} = p\big|_{p^{-1}(X)}\,. \tag{5}$$

Das heißt ϕ ist eine Verfeinerung der Abbildung p, so dass alle Knoten des Graphen H, welche von p auf x_0 abgebildet werden, von ϕ in den Graphen G außerhalb der Menge X eingebettet sind.

Für eine eindeutige Identifikation der Klassen $\mathcal{K}_F^X(G)$ wird auf der Menge aller Paare (H, p) mit obiger Eigenschaft die folgende Äquivalenzrelation definiert: (H, p) und (H', p') heißen äquivalent, geschrieben $(H, p) \sim (H', p')$, falls ein Isomorphismus

$$\varphi : H \mapsto H' \qquad \text{mit } p = p' \circ \varphi \tag{6}$$

existiert. Die von (H, p) erzeugte Äquivalenzklasse wird mit $[H, p]$ bezeichnet.

Lemma 1. *Gegeben sei ein Paar (H, p) und eine Einbettung*

$$\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G \qquad \textit{mit } (H, p) \rhd \phi.$$

Dann existiert für alle Paare (H', p') mit $(H, p) \sim (H', p')$ und alle Untergraphen $U' \in \mathcal{K}_F(G)$ mit $U \sim_X U'$ eine Einbettung

$$\phi' : H' \subseteq F \mapsto U' \subseteq G \qquad \textit{mit } (H', p') \rhd \phi'.$$

Beweis. Wegen $(H, p) \sim (H', p')$ existiert ein Isomorphismus

$$\varphi : H \mapsto H' \qquad \text{mit } p = p' \circ \varphi. \tag{6}$$

Die Abbildung $\phi' := \phi \circ \varphi^{-1}$ ist dann ein Isomorphismus zwischen den Graphen H' und U und es gilt:

$$\mathrm{V}(U) \cap X \underset{(5)}{=} p(\mathrm{V}(H)) \cap X \underset{(6)}{=} (p' \circ \varphi)(\mathrm{V}(H)) \cap X \underset{(6)}{=} p'(\mathrm{V}(H')) \cap X. \tag{$*$}$$

Da $p\big|_{p^{-1}(X)}$ bijektiv ist, gilt

$$(p')^{-1}(X) = \left(p \circ \varphi^{-1}\right)^{-1}(X) = \left(\varphi \circ p^{-1}\right)(X)$$

und damit

$$\varphi^{-1}\left((p')^{-1}(X)\right) = p^{-1}(X). \tag{$\triangle$}$$

Es folgt somit:

$$\begin{aligned} \phi'\big|_{(p')^{-1}(X)} &= \left(\phi \circ \varphi^{-1}\right)\big|_{(p')^{-1}(X)} \\ &\underset{(\triangle)\text{ und }(5)}{=} \left(p \circ \varphi^{-1}\right)\big|_{(p')^{-1}(X)} = p'\big|_{(p')^{-1}(X)}. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt $(H', p') \rhd \phi'$.

Wegen $U \sim_X U'$ gilt weiter (siehe Definition 2)

$$V(U') \cap X = V(U) \cap X \underset{(*)}{=} p'(\mathrm{V}(H')) \cap X. \tag{$\sharp$}$$

Außerdem existiert nach Definition 2 ein Isomorphismus

$$\psi : U \mapsto U' \qquad \text{mit } \psi\big|_{U[X]} = \mathrm{id}\big|_{U[X]}.$$

Damit ist $\psi \circ \phi'$ ein Isomorphismus von H' auf U' und es gilt

$$\left(\psi \circ \phi'\right)\big|_{(p')^{-1}(X)} = \psi\big|_{U[X]} \circ \phi'\big|_{(p')^{-1}(X)} = \phi'\big|_{(p')^{-1}(X)} = p'\big|_{(p')^{-1}(X)}. \tag{$\sharp\sharp$}$$

Aus $(\sharp)$ und $(\sharp\sharp)$ folgt $(H', p') \rhd (\psi \circ \phi')$. $\square$

Jeder Klasse $C \in \mathcal{K}_F^X(G)$ sei eine Klasse $[H,p]$ wie folgt zugeordnet: Es wird $[H,p] \rhd C$ geschrieben, falls ein Repräsentant U von C und eine Einbettung

$$\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G \qquad \text{mit } (H,p) \rhd \phi \tag{7}$$

existiert.

Da jede Klasse C einen Repräsentanten U hat und für diesen Repräsentanten eine Einbettung ϕ existiert, ist ein Paar (H,p) mit $(H,p) \rhd \phi$ und damit $[H,p] \rhd C$ gegeben.

Zu zeigen bleibt, dass diese Zuordnung eindeutig ist.

Lemma 2. *Für $C \in \mathcal{K}_F^X(G)$ seien die Zuordnungen $[H,p] \rhd C$ und $[H',p'] \rhd C$ gegeben. Dann gilt $[H,p] = [H',p']$.*

Beweis. Aus Lemma 1 folgt zunächst, dass Einbettungen

$$\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G \qquad \text{und} \qquad \phi' : H' \subseteq F \mapsto U \subseteq G$$

mit $[U] = C$, $(H,p) \rhd \phi$ und $(H',p') \rhd \phi'$ existieren.

Es folgt

$$p(V(H)) \cap X = V(U) \cap X = p'(V(H')) \cap X. \tag{$*$}$$

Die Abbildung

$$\varphi := (\phi')^{-1} \circ \phi$$

ist ein Isomorphismus von H nach H'. Es gilt weiterhin

$$\begin{aligned} \varphi\left(p^{-1}(X)\right) &= \left((\phi')^{-1} \circ \phi\right)\left(p^{-1}(X)\right) \\ &\underset{(5)}{=} \left((\phi')^{-1} \circ p\right)\left(p^{-1}(X)\right) \\ &= (\phi')^{-1}(p(\mathrm{V}(H)) \cap X) \\ &\underset{(*)}{=} (\phi')^{-1}(p'(\mathrm{V}(H')) \cap X) \\ &\underset{(5)}{=} (p')^{-1}(p'(\mathrm{V}(H')) \cap X) \\ &= (p')^{-1}(X). \end{aligned} \tag{$**$}$$

Womit folgt

$$\begin{aligned} p\,\big|_{p^{-1}(X)} &\underset{(5)}{=} \phi\,\big|_{p^{-1}(X)} \\ &= \left(\phi' \circ \varphi\right)\big|_{p^{-1}(X)} \\ &\underset{(**)}{=} \phi'\,\big|_{(p')^{-1}(X)} \circ \varphi\,\big|_{p^{-1}(X)} \\ &\underset{(5)}{=} p'\,\big|_{(p')^{-1}(X)} \circ \varphi\,\big|_{p^{-1}(X)} \\ &= \left(p' \circ \varphi\right)\big|_{p^{-1}(X)}\,. \end{aligned}$$

Aus $p(V(H)) \cap X = p'(V(H')) \cap X$ und $p\,\big|_{p^{-1}(X)} = (p' \circ \varphi)\,\big|_{p^{-1}(X)}$ folgt $p = p' \circ \varphi$ und damit $[H,p] = [H',p']$ (siehe (6)). $\square$

Es soll nun gezeigt werden, dass noch eine weitere Bedingung an die in G eingebetteten Untergraphen von F gestellt werden kann. Dazu sei U ein Untergraph von G und $\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G$ eine passende Einbettung.

Die Menge $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ beschreibt genau den Bereich des Graphen G, in dem sich der Graph G mit weiteren Graphen G', welche später hinzugenommen werden, überschneidet. Der Graph U ist eine Kopie des Graphen H. Es ist zulässig, dass H kein induzierter Untergraph von F ist. Das ist in dem Fall wichtig, wenn mit der Hinzunahme des Graphen G' Kanten in X hinzukommen.

Dabei ist offensichtlich, dass mit dem Hinzufügen eines Graphen G' keine Kanten in $\mathrm{V}(G) \setminus X$ dazukommen können. Die eingebetteten Kopien von Untergraphen von F, welche zusammengefügt nie eine vollständige Kopie von F liefern, sind für die Signatur aber nicht relevant.

Deswegen genügt es, alle diejenigen Untergraphen U (bzw. deren Äquivalenzklassen) zu betrachten, für welche eine Einbettung $\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G$ existiert, so dass gilt:

$$\begin{aligned}&\text{Falls } v \in \mathrm{V}(H) \text{ mit } \phi(v) \notin X \\ &\qquad \Rightarrow \text{für alle Kanten } e \in \mathrm{E}(F) \text{, welche } v \text{ enthalten, gilt } e \in \mathrm{E}(H).\end{aligned}$$

Die entsprechende Bedingung lässt sich auf die Paare (H, p) übertragen:

$$\begin{aligned}&\text{Falls } v \in \mathrm{V}(H) \text{ mit } p(v) = x_0 \\ &\qquad \Rightarrow \text{für alle Kanten } e \in \mathrm{E}(F) \text{, welche } v \text{ enthalten, gilt } e \in \mathrm{E}(H).\end{aligned} \tag{8}$$

Falls für alle Graphen G_1 und G_2, für welche die Vereinigung $G_1 \cup G_2$ gebildet werden soll, die Zusatzbedingung

$$G_1 \cap G_2 = (G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cap G_2)$$

gilt (das heißt auch mit der Hinzunahme des Graphen G_2 kommen in G_1 keine Kanten dazu), dann kann zusätzlich

$$H \text{ ist ein induzierter Untergraph von } F \tag{9}$$

gefordert werden. Für den Algorithmus 1 ist diese Zusatzbedingung gegeben, da immer nur induzierte Untergraphen von G vereinigt werden.

Die Menge aller Paare (H, p), welche die Bedingung (8) (bzw. je nach Anwendung auch (9)) erfüllen, sei mit $\mathcal{I}(F, X)$ und die Menge aller darauf bezüglich $\sim$ erzeugten Äquivalenzklassen mit $\mathcal{M}(F, X)$ bezeichnet.

Für einen Graphen G sei nun seine F, X*-Signatur* definiert als

$$\mathrm{sig}_F^X(G) := \{P \in \mathcal{M}(F, X) : \text{ es existiert ein } U \subseteq G \text{ mit } P \rhd [U]\}.$$

Die Signatur einer Menge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ sei definiert als die Signatur des von S in G induzierten Graphen:

$$\mathrm{sig}_F^{G,X}(S) := \mathrm{sig}_F^X(G[S]).$$

Es gilt dann umgekehrt:

$$\mathrm{sig}_F^X(G) = \mathrm{sig}_F^{G,X}(\mathrm{V}(G)).$$

Die Signatur $\mathrm{sig}_F^{G,X}(S)$ einer Menge S entspricht der Größe $h_F^{G,X}(S)$ aus dem letzten Abschnitt. Elemente aus $\mathcal{M}(F, X)$ beschreiben die Untergraphen aus $\mathcal{K}_F^X(G)$ für beliebige Graphen G, dass heißt, die Äquivalenzklassen der Untergraphen sind jetzt lediglich anders identifiziert.

Offensichtlich ist die Bedingung (I) aus Problem 2 für die F, X-Signatur erfüllt. Ein Graph G enthält genau dann eine Kopie von F als Untergraphen, wenn ein Paar $(F, p) \in \mathcal{I}(F, X)$ mit $[F, p] \in \mathrm{sig}_F^X(G)$ existiert.

Die Funktion $a : \mathcal{P}(\mathcal{M}(F, X)) \mapsto \mathcal{P}(X)$ mit

$$\begin{aligned} a(Q) = \{x \in X :\ & \text{es existiert ein Paar } (H, p) \in \mathcal{I}(F, X) \text{ mit} \\ & H = (\{v\}, \emptyset) \subseteq F,\ p(v) = x \text{ und } [H, p] \in Q\} \end{aligned}$$

erfüllt die Bedingung (A).

Sei nun $P \in \mathcal{M}(F, X)$ und $Y \subseteq X$. Falls Paare $(H, p) \in \mathcal{I}(F, X)$ und $(H, p') \in \mathcal{I}(F, Y)$ mit $P = [H, p]$ und

$$p'(v) = \begin{cases} p(v) & p(v) \in Y \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

existieren, dann sei $P^Y := [H, p']$.

Es ist möglich, dass kein solches Paar (H, p') existiert, welches außerdem die Bedingung (8) erfüllt. In diesem Fall fällt die entsprechende Einbettung beim Zusammenziehen der Menge X auf die Menge Y aus der Signatur heraus. Durch Einschränken der Ansatzstelle X auf die Menge Y gibt es für die Einbettung kein passendes Gegenstück mehr, so dass eine vollständige Kopie von F entsteht. P^Y ist in diesem Fall nicht definiert.

Lemma 3. *Sei $P \in \mathcal{M}(F, X)$, P^Y sei definiert und $C \in \mathcal{K}_F^X(G)$ mit $P \rhd C$. Dann existiert ein $C^Y \in \mathcal{K}_F^Y(G)$ mit $P^Y = C^Y$.*

Beweis. Da P^Y definiert ist, existieren Paare $(H, p) \in \mathcal{I}(F, X)$ und $(H, p') \in \mathcal{I}(F, Y)$ mit $P \rhd [H, p]$ und

$$p'(v) = \begin{cases} p(v) & p(v) \in Y \\ x_0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Lemma 1 existiert eine Einbettung

$$\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G$$

mit $(H, p) \rhd \phi$ und $[U]^X = C$.

Daraus folgt aber sofort $(H, p') \rhd \phi$ und somit gilt $P^Y \rhd [U]^Y$. $\square$

Aus Lemma 3 folgt, dass die Funktion

$$b^{X,Y} : \mathcal{P}(\mathcal{M}(F,X)) \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{M}(F,Y))$$

mit

$$b^{X,Y}(Q) := \left\{P' \in \mathcal{M}(F,Y) : \text{ es existiert ein } P \in Q \text{ mit } P' = P^Y\right\}$$

die Bedingung (B) aus Problem 2 erfüllt. Es gilt

$$\mathrm{sig}_F^{G,Y}(S) = b^{X,Y}\left(\mathrm{sig}_F^{G,X}(S)\right).$$

Analog wie für die Klassen der Untergraphen wird jetzt für $P \in \mathcal{M}(F,X)$, $P_1 \in \mathcal{M}(F,X_1)$ und $P_2 \in \mathcal{M}(F,X_2)$

$$P = P_1 \star P_2$$

geschrieben, falls $(H,p) \in \mathcal{I}(F,X)$, $(H_1,p_1) \in \mathcal{I}(F,X_1)$ und $(H_2,p_2) \in \mathcal{I}(F,X_2)$ mit $[H,p] = P$, $[H_1,p_1] = P_1$ und $[H_2,p_2] = P_2$ existieren, so dass

$$H = H_1 \cup H_2, \qquad p(\mathrm{V}(H_1)) \cap X_2 = p(\mathrm{V}(H_2)) \cap X_1 \qquad \text{und}$$

$$p\,\big|_{\mathrm{V}(H_1)} = p_1, \qquad p\,\big|_{\mathrm{V}(H_2)} = p_2.$$

Lemma 4. *Sei $P \in \mathcal{M}(F,X)$, $P_1 \in \mathcal{M}(F,X_1)$ und $P_2 \in \mathcal{M}(F,X_2)$ mit $P = P_1 \star P_2$. Falls $C_1 \in \mathcal{K}_F^{X_1}(G_1)$ und $C_2 \in \mathcal{K}_F^{X_2}(G_2)$ mit $P_1 \rhd C_1$ und $P_2 \rhd C_2$ existieren, dann existiert ein $C \in \mathcal{K}_F^X(G)$ mit $P \rhd C$ und $C = C_1 \star C_2$.*

Insbesondere folgt damit auch, dass $P_1 \star P_2$, falls es existiert, eindeutig bestimmt ist.

Beweis. Aus $P = P_1 \star P_2$ folgt zunächst, dass Paare (H,p), (H_1,p_1) und (H_2,p_2) mit $P = [H,p]$, $P_1 = [H_1,p_1]$ und $P_2 = [H_2,p_2]$ existieren, so dass

$$H = H_1 \cup H_2, \qquad p(\mathrm{V}(H_1)) \cap X_2 = p(\mathrm{V}(H_2)) \cap X_1 \qquad \text{und}$$

$$p\,\big|_{V(H_1)} = p_1, \qquad p\,\big|_{V(H_2)} = p_2$$

gilt. Wegen $P_1 \rhd C_1$ und $P_2 \rhd C_2$ existieren nach Lemma 1 Einbettungen

$$\phi_1 : H_1 \subseteq F \mapsto U_1 \subseteq G_1 \qquad \text{und} \qquad \phi_2 : H_2 \subseteq F \mapsto U_2 \subseteq G_2$$

mit $[U_1] = C_1$, $[U_2] = C_2$ und $(H_1,p_1) \rhd \phi_1$, $(H_2,p_2) \rhd \phi_2$.

Es gilt weiter

$$\mathrm{V}(U_1) \cap X_2 \underset{(5)}{=} p_1(\mathrm{V}(H_1)) \cap X_2 = p_2(\mathrm{V}(H_2)) \cap X_1 \underset{(5)}{=} \mathrm{V}(U_2) \cap X_1.$$

Aus $p_1\,\big|_{\mathrm{V}(H_1)\cap \mathrm{V}(H_2)} = p_2\,\big|_{\mathrm{V}(H_1)\cap \mathrm{V}(H_2)}$ folgt $\phi_1\,|_{H_1 \cap H_2} = \phi_2\,|_{H_1\cap H_2}$. Es sei $U = U_1 \cup U_2$. Ein Isomorphismus

$$\phi : H \subseteq F \mapsto U \subseteq G$$

ist dann eindeutig durch $\phi|_{H_1} = \phi_1$ und $\phi|_{H_2} = \phi_2$ definiert. Damit folgt zunächst (siehe (2)) $U = U_1 \star U_2$ und schließlich (siehe (3)) $[U] = C_1 \star C_2$.

Aus

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(U) \cap X &= (\mathrm{V}(U_1) \cap X_1) \cup (\mathrm{V}(U_2) \cap X_2) \\ &= (p_1(\mathrm{V}(H_1)) \cap X_1) \cup (p_2(\mathrm{V}(H_2)) \cap X_2) = p(\mathrm{V}(H)) \cap X \end{aligned}$$

und $\phi\big|_{\mathrm{V}(H)} = p\big|_{\mathrm{V}(H)}$ folgt $(H, p) \rhd \phi$ und damit $P \rhd [U]$ (siehe (7)). □

Aus Lemma 4 folgt, dass die Funktion

$$c : M^{12} \mapsto \mathcal{P}(\mathcal{M}(F, X))$$

mit

$$M^{12} := \{(Q_1, Q_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{M}(F, X_1)) \times \mathcal{P}(\mathcal{M}(F, X_2)) : \\ a(Q_1) \cap X_2 = a(Q_2) \cap X_1\}$$

und

$$c(Q_1, Q_2) = \{P \in \mathcal{M}(F, X) : P = P_1 \star P_2 \text{ mit } P_1 \in Q_1 \text{ und } P_2 \in Q_2\}$$

die Bedingung (C) erfüllt, das heißt

$$\mathrm{sig}_F^{G,X}(S) = c\left(\mathrm{sig}_F^{G_1,X_1}(S_1), \mathrm{sig}_F^{G_2,X_2}(S_2)\right).$$

Die Signatur $\mathrm{sig}_F^{G,X}(S)$ erfüllt damit alle Bedingungen aus Problem 2 und zusätzlich hängt die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{M}(F, X))$ aller möglichen Signaturen nicht mehr vom konkreten Graphen G ab.

Nicht für alle $Q \subseteq \mathcal{M}(F, X)$ existiert ein Graph G mit $\mathrm{sig}_F^X(G) = Q$. Es gilt zunächst die folgende notwendige Bedingung:

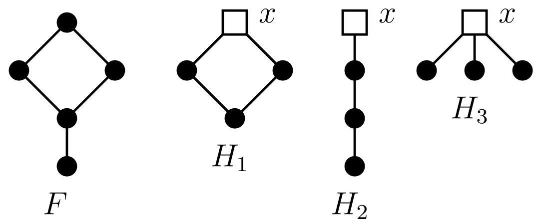
Beobachtung 3. *Sei $Q = \mathrm{sig}_F^X(G)$ und $(H, p) \in \mathcal{I}(F, X)$ mit $[H, p] \in Q$. Dann folgt $[H', p'] \in Q$ für alle (H', p'), für welche $H' \subseteq H$, $p' = p\big|_{\mathrm{V}(H')}$ und welche die Bedingung (8) erfüllen.*

Auf die Einbettungen bezogen heißt das nichts anderes, als dass mit jedem $H \subseteq F$ auch alle (zulässigen) Untergraphen von H eingebettet sind.

Neben dieser Bedingung ergeben sich jedoch weitere nicht triviale Kriterien, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 1.

Sind die Untergraphen H_1 und H_2 eingebettet, dann ist immer auch eine Kopie des Graphen F oder der Graph H_3 eingebettet. Das heißt, es gibt keinen Graphen G, so dass nur H_1, H_2 und deren (zulässige) Untergraphen eingebettet sind.



Für den Algorithmus selbst ist die Existenz eines Graphen mit einer gegebenen Signatur $Q \subseteq \mathcal{M}(F, X)$ nicht relevant. Die größte Menge mit der Signatur Q ist in dem Fall, dass kein Graph (und damit auch kein induzierter Untergraph) mit der Signatur Q existiert, per Definition dann einfach die leere Menge.

Trotzdem sei an dieser Stelle folgendes bemerkt:

Beobachtung 4. *Sei G ein Graph mit $\mathrm{sig}_F^X(G) = Q$. Dann existiert ein Graph $G' \subseteq G$ mit $\mathrm{sig}_F^X(G') = Q$ und $|\mathrm{V}(G')| \leq |\mathcal{M}(F, X)||\mathrm{V}(F)|$.*

Beweis. Für jedes $q \in Q$ existiert eine Einbettung $\phi_q : H_q \subseteq F \mapsto U_q \subseteq G$ mit $q \rhd [U_q]$. Setze $G' = \cup_{q \in Q} U_q$. Dann hat G' höchstens $|\mathcal{M}(F, X)||\mathrm{V}(F)|$ Knoten und $\mathrm{sig}_F^X(G') = Q$. □

Da $|\mathcal{M}(F, X)|$ nur von $|X|$ und F abhängt, kann die Menge aller $Q \subseteq \mathcal{M}(F, X)$, für welche ein Graph G mit $\mathrm{sig}_F^X(G) = Q$ existiert, in konstanter Zeit durch vollständige Enumeration berechnet werden (vorausgesetzt $|X|$ und F gehören nicht zur Eingabe).

2.6 Spezialfall Baumweite 1

Der Algorithmus 1 kann natürlich auch auf den Spezialfall angewendet werden, dass G ein Baum ist. Die Baumzerlegung eines Baumes ergibt sich im wesentlichen, indem für jede Kante von G ein Behälter erzeugt wird, welcher genau die beiden Endknoten der Kante enthält.

Für diesen Fall existiert jedoch noch ein einfacherer Algorithmus, welcher die Struktur des Baumes direkt verwendet. Es sei außerdem gegeben, dass G und F zusammenhängend sind. Ist F kein Baum, so sind alle $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ F-unabhängig. Sei also F ein Baum.

Folgende rekursive Definition, die auf dem simplen Prinzip beruht, dass nach dem Löschen der Wurzel eines Baumes die Komponenten wieder Bäume sind, wobei als neue Wurzeln die Kinder der ursprünglichen Wurzel gewählt werden, wird bereits den Algorithmus liefern:

Definition 3. Sei G ein Baum und $x \in \mathrm{V}(G)$. Eine Menge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ heißt *maximal F-unabhängige Menge auf allen Ästen von G bezüglich der Wurzel x* falls folgende Bedingungen erfüllt sind.

1. S ist F-unabhängig.

2. $G - x$ ist leer und $S = \{x\}$ oder
   $S_i = S \cap \mathrm{V}(G_i)$ ist eine maximal F-unabhängige Menge auf allen Ästen von G_i bezüglich der Wurzel y_i für alle $i = 1, \ldots, k$ wobei $G_i, \ldots, G_k$ die Komponenten von $G - x$ sind und y_i das Kind von x in G_i, das heißt $\{y_i\} = N_G(x) \cap \mathrm{V}(G_i)$.

Satz 3. *Sei G ein Baum, $x \in \mathrm{V}(G)$ und $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ eine maximal F-unabhängige Menge auf allen Ästen von G bezüglich der Wurzel x. Dann ist S eine größte F-unabhängige Menge auf G.*

Beweis. Per Induktion: Falls $\mathrm{V}(G) = \{x\}$, ist die Behauptung offensichtlich wahr. Sei also $|\mathrm{V}(G)| > 1$. Falls $x \in S$ ist, folgt sofort, dass S eine größte F-unabhängige Menge auf G ist. Sei also $x \notin S$, dann ist $S' = S \cup \{x\}$ F-abhängig, genauer, $G[S']$ enthält eine Kopie H von F mit $x \in \mathrm{V}(H)$. Es kann nun gezeigt werden, das keine F-unabhängige Menge T mit $|T| = |S'|$ existieren kann. Eine solche Menge T darf H nicht enthalten. Seien $G_1, \ldots, G_k$ die Komponenten von $G - H$ und $S_i = S \cap \mathrm{V}(G_i)$ für $i = 1, \ldots, k$. Da H ein Baum ist und $x \in \mathrm{V}(H)$, ist S_i eine maximal F-unabhängige Menge auf allen Ästen von G_i bezüglich der Wurzel y_i, mit $\{y_i\} = N_G(H) \cap \mathrm{V}(G_i)$. Damit ist S_i laut Induktionsvoraussetzung aber eine größte F-unabhängige Menge auf G_i (Abbildung 10). Für alle F-unabhängigen Mengen $T \subseteq \mathrm{V}(G)$ gilt also $|T \cap \mathrm{V}(G - H)| \leq |S \cap \mathrm{V}(G - H)|$ und mit

$$\begin{aligned} |T| &< |T \cap \mathrm{V}(G - H)| + |H| \\ |S| &= |S \cap \mathrm{V}(G - H)| + |H| - 1 \end{aligned}$$

folgt $|T| \leq |S|$ und damit die Behauptung. □

Der rekursive Algorithmus ergibt sich nun wie folgt:

Algorithmus 2. treemaxindset$_F(G, x)$

- Falls $\mathrm{V}(G) = \{x\}$ gib $S = \{x\}$ zurück.
- Sonst seien $G_1, \ldots, G_k$ die Komponenten von $G - x$. Bestimme

  $$S_i = \mathbf{treemaxindset}_F(G_i, y_i) \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

  wobei y_i das Kind von x in G_i ist. Setze

  $$S = \bigcup_{i=1,\ldots,k} S_i$$

  Falls $S \cup x$ F-unabhängig, gib $S \cup \{x\}$ zurück, ansonsten gib S zurück.

Da **treemaxindset**$_F$ für jeden Knoten von G genau einmal aufgerufen wird, ergibt sich für den Algorithmus eine Laufzeit von $\mathrm{O}(|\mathrm{V}(G)|)$.

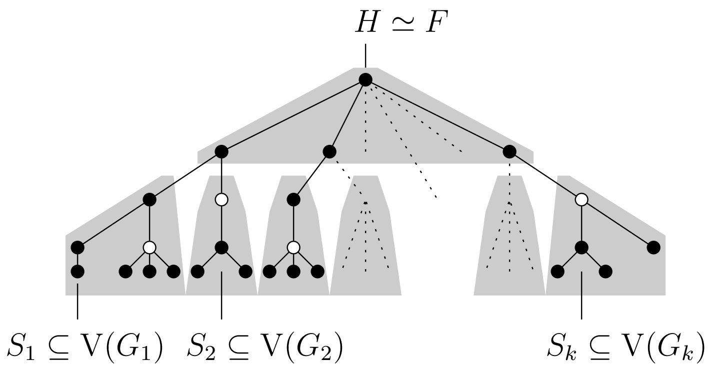


Abbildung 10: Die Mengen $S_i \subseteq \mathrm{V}(G_i)$ wurden vom Algorithmus in einem früheren Rekursionsschritt generiert und sind daher größte F-unabhängige Mengen auf den Teilbäumen G_i

3 Die Klasse der well-F-covered Graphen

3.1 Motivation

Das folgende Beispiel zeigt, dass Graphen beliebig großer Baumweite existieren, für welche sich dennoch mittels eines polynomiellen Algorithmus eine größte P_3-unabhängige Menge finden lässt.

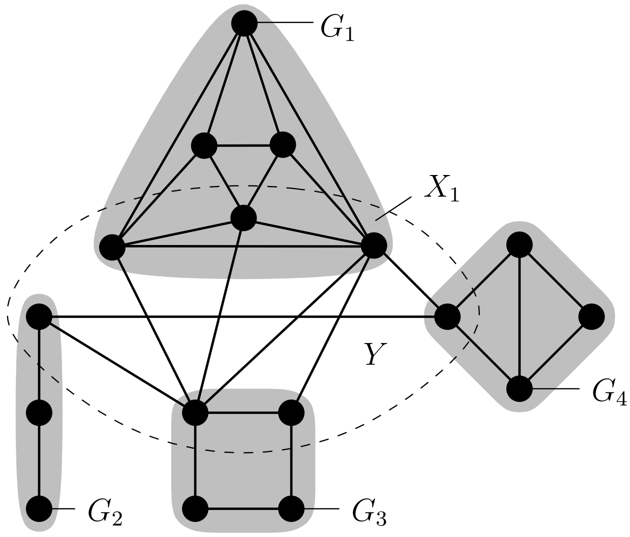


Abbildung 11: Jede maximale P_3-unabhängige Menge ist zugleich eine größte

Beispiel 2. *Seien $G_1, \dots, G_k$ zueinander disjunkte zusammenhängende Graphen, $X_i \subseteq \mathrm{V}(G_i)$ und für $i = 1, \dots, k$ gelte*

1. $\alpha_{P_3}(G_i) = 2$
2. *Für alle $x \in X_i$ existiert ein $y \in \mathrm{V}(G_i)$ mit $\mathrm{d}_{G_i}(x, y) = 2$*
3. $G_i[X_i] \simeq K_{|X_i|}$

Die Kantenmenge $A \subseteq \binom{Y}{2}$ auf $Y = X_1 \dot\cup \cdots \dot\cup X_k$ enthalte beliebige Kanten zwischen den ausgezeichneten Mengen X_i.

Dann existiert ein polynomieller Algorithmus, welcher eine größte P_3-unabhängige Menge von

$$G = G_1 \dot\cup \cdots \dot\cup G_k + A$$

findet.

Beweis. Der folgende einfache Greedy-Algorithmus liefert bereits eine solche Menge:

1. Wähle eine beliebige Reihenfolge der Knoten $\{v_1, \ldots, v_k\}$ von G und setze $S_0 = \emptyset$.

2. Für $i = 1, \ldots, n$ setze $S_i = S_{i-1} \cup \{v_i\}$ falls $S_{i-1} \cup \{v_i\}$ P_3-unabhängig ist und $S_i = S_{i-1}$ sonst.

3. Gib $S = S_n$ zurück.

Die Menge S ist offensichtlich eine maximale P_3-unabhängige Menge. Es lässt sich zeigen, dass

$$|S \cap \mathrm{V}(G_i)| = 2 \text{ für alle } i = 1, \ldots, k \qquad (*)$$

womit folgt, dass jede maximale P_3-unabhängige Menge von G auch eine größte P_3-unabhängige Menge ist.

Falls $X_i = \emptyset$ folgt $(*)$ sofort, da dann G_i eine Komponente von G ist. Sei also $|X_i| > 0$.

Falls $|S \cap X_i| = 2$ folgt die Behauptung. Ist $|S \cap X_i| = 1$, also $S \cap X_i = \{x\}$ existiert nach Voraussetzung ein $y \in \mathrm{V}(G_i) \setminus X_i$ mit $\mathrm{d}_G(x, y) = 2$. Da S maximal ist, folgt damit $(*)$.

Um den Fall $|S \cap X_i| = 0$ zu behandeln wird gezeigt, dass $|\mathrm{V}(G_i) \setminus X_i| \geq 2$ ist. Sei dazu $x \in X_i$, dann existiert laut Voraussetzung ein $y \in \mathrm{V}(G_i) \setminus X_i$ mit $\mathrm{d}_G(x, y) = 2$. Falls $\mathrm{d}_G(\hat{x}, y) = 2$ für alle $\hat{x} \in X_i$, dann muss ein $z \in \mathrm{V}(G_i) \setminus X_i$ existieren, welches zu x und y benachbart ist. Existiert hingegen ein $\hat{x} \in X_i$ mit $\mathrm{d}_G(\hat{x}, y) < 2$, dann folgt, dass ein $\hat{y} \in \mathrm{V}(G_i) \setminus X_i$ mit $\mathrm{d}_G(\hat{x}, \hat{y}) = 2$ und $\hat{y} \neq y$ existiert. In beiden Fällen folgt also $|\mathrm{V}(G_i) \setminus X_i| \geq 2$ und da S maximal ist somit $(*)$. □

Die Graphen mit $\alpha_{P_3}(G) = 2$ lassen sich leicht charakterisieren:

Beobachtung 5. *Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ hat Unabhängigkeitszahl $\alpha_{P_3}(G) = 2$ genau dann, wenn $G \simeq K_n - M$ mit einem Matching M ist.*

Beweis. Sei $\alpha_{P_3}(G) = 2$ und $uv \in \bar{G}$, also $uv \notin \mathrm{E}(G)$. Wegen $\alpha_{P_3}(G) = 2$ ist $S = \{u, v\}$ eine größte P_3-unabhängige Menge. Da sich S also nicht weiter vergrößern lässt, muss für alle Knoten $w \in V$ mit $w \neq u, v$ gelten, dass $uw, vw \in \mathrm{E}(G)$ und damit $uw, vw \notin \mathrm{E}(\bar{G})$. Daraus folgt, dass alle Knoten in $\bar{G}$ höchstens Grad 1 haben, und somit ist $G \simeq K_n - M$ mit einem Matching M.

Sei nun umgekehrt $G \simeq K_n - M$ mit einem Matching M, das heißt alle Knoten in $\bar{G}$ haben höchstens Grad 1. Zu zeigen ist, dass jede (P_3-unabhängige) Menge $S = \{u, v\}$ mit $|S| = 2$ eine größte P_3-unabhängige Menge ist. Falls $uv \notin \mathrm{E}(G)$ und damit $uv \in \mathrm{E}(\bar{G})$ folgt sofort $uw, vw \in \mathrm{E}(G)$ für alle $w \in V$ mit $w \neq u, v$. Damit kann S nicht vergrößert werden, da $G[\{u, v, w\}]$ isomorph zu P_3 ist. Sei nun $uv \in \mathrm{E}(G)$. Dann gilt für alle Knoten $w \in V$ mit $w \neq u, v$ dass $uw \notin \mathrm{E}(\bar{G})$ oder $uv \notin \mathrm{E}(\bar{G})$. Also kann S auch in diesem Fall nicht vergrößert werden. □

In der Literatur werden Graphen, für die jede maximal unabhängige Menge zugleich auch eine größte unabhängige Menge ist, als *well-covered* bezeichnet [9]. Es bietet sich also folgende verallgemeinerte Definition für den Fall der F-Unabhängigkeit an:

Definition 4 (well-F-covered)**.** Ein Graph $G = (V, E)$ heißt genau dann *well-F-covered*, wenn jede maximale F-unabhängige Menge eine größte F-unabhängige Menge ist.

Chvátal und Slater [5] haben gezeigt, dass das Problem, zu erkennen ob ein Graph well-covered ist, co-NP-vollständig ist.

3.2 Beschränkte Baumweite

Für Graphen beschränkter Baumweite lässt sich die Frage, ob ein Graph well-F-covered ist, in Polynomialzeit beantworten. Der Algorithmus 1 liefert bereits die Größe einer größten F-unabhängigen Menge. Falls zusätzlich eine kleinste maximale F-unabhängige Menge bekannt ist, kann entschieden werden, ob der Graph well-F-covered ist.

Leider liefert die Signatur $\mathrm{sig}_F^X(G[S])$ keinerlei Information darüber, ob die Menge S *maximal* F-unabhängig ist.

Gesucht ist daher wie in Problem 2 des Abschnitts 2.4 eine Signatur $h_F^{G,X}$, welche die Forderungen (A), (B), (C) und (II) erfüllt. Anstelle von (I) soll hier jetzt jedoch gelten:

(I') Ist $h_F^{G,X}(S)$ für eine Menge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$ bekannt, dann auch ob S eine *maximale* F-unabhängige Menge von G ist

Um eine solche Größe zu bestimmen, sei das folgende Teilproblem betrachtet:

Problem 3. *Gegeben sei ein Graph G, eine Menge $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ und eine Teilmenge $S \subseteq \mathrm{V}(G)$. Es sei G' ein Graph mit $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(G') = X$ und $S' \subseteq \mathrm{V}(G')$ mit $S \cap X = S' \cap X$. Falls die Menge $S \cup S'$ F-unabhängig in $G \cup G'$ ist und für alle $T \subseteq \mathrm{V}(G)$ mit $S \subset T$ die Menge $T \cup S'$ in $G \cup G'$ F-abhängig ist, dann heißt (G', S')* zulässige Erweiterung *(in X) von (G, S).*

Ein Graph G' heißt zulässige Erweiterung von (G, S) (in X), falls

$$(G', S' = \mathrm{V}(G') \setminus (X \setminus S))$$

eine zulässige Erweiterung von (G, S) ist. Es werden alle Knoten von G' bis auf die, welche nicht in $S \cap X$ liegen, zu S' hinzugenommen, damit die Mengen S und S' mit X wieder den gleichen Durchschnitt haben.

Gesucht sind alle zulässigen Erweiterungen von (G, S).

Der Hintergrund für diese Problemstellung ist folgender: Die Menge S ist genau dann maximal F-unabhängig in G, wenn der leere Graph $(X, \emptyset)$ auf X, im folgenden mit $\mathcal{E}(X)$ bezeichnet, eine zulässige Erweiterung von (G, S) ist. Für Graphen G und G' mit $S \subseteq \mathrm{V}(G)$, $S' \subseteq \mathrm{V}(G')$, $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(G') = X$ und $S \cap X = S \cap X'$ ist die Menge $S \cup S'$ offensichtlich genau dann maximal F-unabhängig in $G \cup G'$, wenn (G, S) eine zulässige Erweiterung von (G', S') und (G', S') eine zulässige Erweiterung von (G, S) ist.

Nach Folgerung 1 ergibt sich der Gesamtgraph durch Vereinigung der durch Behälter induzierten Untergraphen in einer geeigneten Reihenfolge. Es wird sich zeigen, dass sich aus der Liste aller zulässigen Erweiterungen pro Behälter die Liste der zulässigen Erweiterungen für den Gesamtgraphen ergibt.

Beobachtung 6. *Falls die Signatur $\mathrm{sig}_F^{G,X}(S)$ bekannt ist, dann ist für alle $Y \subseteq X$ die Signatur $\mathrm{sig}_F^{G,X}(S \setminus Y)$ bekannt, da die Einbettungen der Untergraphen von F gerade auf der Menge X unterschieden werden.*

Es sei daher

$$w^{X,Y}(Q \subseteq \mathcal{M}(F, X)) := \{P \in Q : \textit{ für } (H, p) \in \mathcal{I}(F, X) \textit{ mit } [H, p] = P \\ \textit{gilt } p(\mathrm{V}(H)) \cap Y = \emptyset\}.$$

Die Berechnung von $w^{X,Y}(Q)$ benötigt nur konstante Zeit und es gilt

$$\mathrm{sig}_F^{G,X}(S \setminus Y) = w^{X,Y}\left(\mathrm{sig}_F^{G,X}(S)\right). \tag{W}$$

Die Funktion $w^{X,Y}$ ist nicht mit der Funktion $b^{X,Y}$ zu verwechseln, welche die Äquivalenzklassen der Einbettungen von X auf Y transformiert.

Es gilt weiterhin folgendes Lemma:

Lemma 5. *Für einen Graphen G' und $S' \subseteq \mathrm{V}(G')$ ist (G', S') mit $S \cap X = S' \cap X$ und $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(G') = X$ genau dann eine zulässige Erweiterung von (G, S) in X, wenn jeder Graph H mit $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(H) = X$ und*

$$\mathrm{sig}_F^X(H) = \mathrm{sig}_F^{G',X}(S' \cup X) \tag{$*$}$$

eine zulässige Erweiterung von (G, S) in X ist.

Beweis. Es sei $S'' := \mathrm{V}(H) \setminus (X \setminus S)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{sig}_F^{G\cup G',X}(S \cup S' \cup X) &\underset{(C)}{=} c\left(\mathrm{sig}_F^{G,X}(S \cup X), \mathrm{sig}_F^{G',X}(S' \cup X)\right) \\
&\underset{(*)}{=} c\left(\mathrm{sig}_F^{G,X}(S \cup X), \mathrm{sig}_F^{X}(H)\right) \\
&\underset{(C)}{=} \mathrm{sig}_F^{G\cup H,X}(S \cup X \cup \mathrm{V}(H)) \\
&= \mathrm{sig}_F^{G\cup H,X}(S \cup S'' \cup X).
\end{aligned}$$

Da $(S \cup S') \cap X = (S \cup S'') \cap X$ ist, folgt aus der Beobachtung 6

$$\mathrm{sig}_F^{G \cup G', X}(S \cup S') = \mathrm{sig}_F^{G \cup H, X}(S \cup S'').$$

Somit ist die Menge $S \cup S'$ genau dann F-unabhängig in $G \cup G'$, wenn $S \cup S''$ F-unabhängig in $G \cup H$ ist.

Ebenso gilt für jede Menge $T \subseteq \mathrm{V}(G)$ mit $S \subset T$:

$$\mathrm{sig}_F^{G \cup G', X}(T \cup S') = \mathrm{sig}_F^{G \cup H, X}(T \cup S'').$$

Die Menge $T \cup S'$ ist also genau dann F-abhängig in $G \cup G'$, wenn $T \cup S''$ F-abhängig in $G \cup H$ ist. Die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Lemma 5 rechtfertigt die folgende Definition:

$$\begin{aligned}\mathrm{ext}_F^{G,X}(S \subseteq (\mathrm{V}(G)) := \big\{Q \subseteq \mathcal{M}(F, X) :\ & \text{es existiert} \\ \text{eine zulässige Erweiterung } H \text{ von } (G, S) \text{ in } X \text{ mit } & \mathrm{sig}_F^X(H) = Q\big\}.\end{aligned}$$

Die Größe $\mathrm{ext}_F^{G,X}(S)$ wird nun als zusätzliche Komponente zur Signatur von S hinzugenommen.

Bemerkung 2.

- (G', S') ist genau dann eine zulässige Erweiterung von (G, S) in X, wenn
$$\mathrm{sig}_F^{G',X}(S' \cup X) \in \mathrm{ext}_F^{G,X}(S).$$
Die Liste aller zulässigen Erweiterungen von (G, S) ist durch $\mathrm{ext}_F^{G,X}(S)$ eindeutig bestimmt.

- Im Gegensatz zur Größe $\mathrm{sig}_F^{G,X}(S)$, die angibt, welche Mengen zu S (und welche Graphen zu G) hinzugenommen werden *können*, so dass S F-unabhängig *bleibt*, beschreibt $\mathrm{ext}_F^{G,X}(S)$, welche Mengen zu S hinzugenommen werden *müssen*, damit S maximal F-unabhängig *wird*.

- Falls die Menge S F-abhängig ist, dann ist $\mathrm{ext}_F^{G,X}(S) = \emptyset$.

- Die Menge S ist genau dann maximal F-unabhängig auf G, wenn der leere Graph $\mathcal{E}(X)$ eine zulässige Erweiterung von (G, S) ist, das heißt wenn
$$\mathrm{sig}_F^X(\mathcal{E}(X)) \in \mathrm{ext}_F^{G,X}(S).$$
Die Bedingung (I') ist damit erfüllt.

- Da H per Definition nur dann eine zulässige Erweiterung von (G, S) sein kann, wenn $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(H) = X$, gilt für alle $Q \in \mathrm{ext}_F^{G,X}(S)$ die Beziehung $a(Q) = X$.

- Die Menge $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{M}(F,X))$ aller möglichen erweiterten Signaturen ist beschränkt, da die Größe der Grundmenge $\mathcal{M}(F,X)$ in X und F beschränkt ist. Damit ist die Bedingung (II) aus Problem 2 erfüllt.
- Weiterhin folgt aus Beobachtung 4, dass $\operatorname{ext}_F^{G,X}(S)$ ermittelt werden kann, indem alle Graphen H mit
$$|\operatorname{V}(H)| \leq |\mathcal{M}(F,X)||\operatorname{V}(F)|$$
überprüft werden. Für jedes $Q \subseteq \mathcal{M}(F,X)$ existiert entweder ein Graph H mit $\operatorname{sig}_F^X(H) = Q$ und $|\operatorname{V}(H)| \leq |\mathcal{M}(F,X)||\operatorname{V}(F)|$ oder es gibt überhaupt keinen solchen Graphen. Damit ist gesichert, dass die Größe $\operatorname{ext}_F^{G[X],X}(S)$ für alle Knotenmengen von durch Behälter induzierten Untergraphen $G[X]$ in konstanter Zeit durch vollständige Enumeration berechnet werden kann.

Da (A) bereits mit $\operatorname{sig}_F^{G,X}$ erfüllt ist, bleibt nur noch zu zeigen, dass für das Funktionspaar
$$\left(\operatorname{sig}_F^{G,X}, \operatorname{ext}_F^{G,X}\right)$$
die Bedingungen (B) und (C) aus Problem 2 gelten.

Beobachtung 7. *Es sei G ein Graph und $Y \subseteq X \subseteq \operatorname{V}(G)$. Ein Graph H mit $\operatorname{V}(G) \cap \operatorname{V}(H) = Y$ ist genau dann eine zulässige Erweiterung von (G,S) in Y, wenn $H \cup \mathcal{E}(X)$ eine zulässige Erweiterung von (G,S) in X ist.*

Beweis.
$$G \cup H = G \cup H \cup \mathcal{E}(X) \qquad \text{und}$$
$$S \cup (\operatorname{V}(H) \setminus (Y \setminus S)) = S \cup ((\operatorname{V}(H) \cup X) \setminus (X \setminus S)).$$
□

Für $J \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M}(F,X))$ und $Y \subseteq X$ sei daher
$$\bar{b}^{X,Y}(J) := \left\{Q \subseteq \mathcal{M}(F,Y) : a(Q) = Y \text{ und } c\left(Q, \operatorname{sig}_F^X(\mathcal{E}(X))\right) \in J\right\}.$$
Es gilt dann
$$\operatorname{ext}_F^{G,Y}(S) = \bar{b}^{X,Y}\left(\operatorname{ext}_F^{G,X}(S)\right).$$
und die Funktion $\bar{b}$ erfüllt somit die Bedingung (B).

Im folgenden seien die Graphen G, G_1 und G_2 mit Eigenschaften und Größen wie im Abschnitt 2.5.1 gegeben (Abbildung 12). Für die Mengen S (bzw. S_1 und S_2) sei das Paar (Q,J) (bzw. (Q_1,J_1) und (Q_2,J_2)) gegeben durch $Q = \operatorname{sig}_F^{G,X}(S)$ und $J = \operatorname{ext}_F^{G,X}(S)$. Es soll nun gezeigt werden, wie sich (Q,J) aus (Q_1,J_1) und (Q_2,J_2) ergibt.

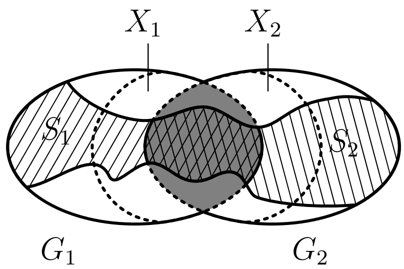


Abbildung 12: Zusammenhang der Größen G_1, X_1, S_1 und G_2, X_2, S_2

Beobachtung 8. *Ein Graph H mit $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(H) = X$ ist genau dann ein zulässige Erweiterung von*

$$(G = G_1 \cup G_2, S = S_1 \cup S_2)$$

in X, wenn

$$(H \cup G_2, S' \cup S_2)$$

eine zulässige Erweiterung von (G_1, S_1) in X_1 und

$$(H \cup G_1, S' \cup S_1)$$

eine zulässige Erweiterung von (G_2, S_2) in X_2 ist (siehe auch Abbildung 13).

Dabei sei $S' := \mathrm{V}(H) \setminus (X \setminus S)$.

Beweis. Es sei H eine zulässige Erweiterung von $(G_1 \cup G_2, S_1 \cup S_2)$, das heißt die Menge $S_1 \cup S_2 \cup S'$ ist F-unabhängig in $G' = H \cup G_1 \cup G_2$ und für alle Mengen $T \subseteq \mathrm{V}(G)$ mit $S \subset T$ ist die Menge $T_1 \cup T_2 \cup S'$ mit $T_1 = T \cap \mathrm{V}(G_1)$ und $T_2 = T \cap \mathrm{V}(G_2)$ in G' F-abhängig.

O.B.d.A. genügt es zu zeigen, dass $(H \cup G_2, S' \cup S_2)$ eine zulässige Erweiterung von (G_1, S_1) in X_1 ist. Die Menge $S_1 \cup S_2 \cup S'$ ist F-unabhängig. Für jedes $T_1 \subseteq \mathrm{V}(G_1)$ mit $S_1 \subset T_1$ ist $T_1 \cup S_2 \subset S_1 \cup S_2$. Somit ist die Menge $T_1 \cup S_2 \cup S'$ F-abhängig in G'.

In der Umkehrrichtung gilt sofort, dass die Menge $S_1 \cup S_2 \cup S'$ F-unabhängig ist. Für eine Menge T mit $S \subset T$ folgt $S_1 \subset T_1$ oder $S_2 \subset T_2$. Damit ist aber die Menge $T_1 \cup S_2 \cup S'$ oder $S_1 \cup T_2 \cup S'$ und somit mit Sicherheit die Menge $T \cup S'$ F-abhängig. □

Nach Bemerkung 2 ist $(H \cup G_2, S' \cup S_2)$ genau dann eine zulässige Erweiterung von (G_1, X_1) in X_1, wenn

$$\mathrm{sig}_F^{H \cup G_2, X_1}(S' \cup S_2 \cup X_1) \in \mathrm{ext}_F^{G_1, X_1}(S_1) = J_1.$$

Weiterhin gilt

$$\mathrm{sig}_F^{H \cup G_2, X_1}(S' \cup S_2 \cup X_1) \underset{(C)}{=} c\left(\mathrm{sig}_F^{H, X_1}(S' \cup X_1), \mathrm{sig}_F^{G_2, X_1 \cap X_2}(S_2)\right). \quad (10)$$

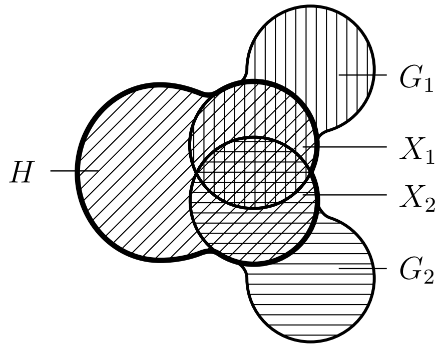


Abbildung 13: Lage einer zulässigen Erweiterung H von $(G_1 \cup G_2, S_1 \cup S_2)$

Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{sig}_F^{G_2, X_1 \cap X_2}(S_2) &\underset{(B)}{=} b^{X_2, X_1 \cap X_2}\left(\operatorname{sig}_F^{G_2, X_2}(S_2)\right) \\ &= b^{X_2, X_1 \cap X_2}(Q_2), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} S' \cup X_1 &= (\mathrm{V}(H) \setminus (X \setminus (S_1 \cup S_2))) \cup X_1 \\ &= (\mathrm{V}(H) \setminus ((X_1 \setminus S_1) \cup (X_2 \setminus S_2))) \cup X_1 \\ &= (\mathrm{V}(H) \setminus (X_2 \setminus S_2)) \cup X_1 \\ &= \mathrm{V}(H) \setminus (X_2 \setminus X_1 \setminus S_2) \\ &\underset{(A)}{=} \mathrm{V}(H) \setminus (X_2 \setminus X_1 \setminus a(Q_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sig}_F^{H, X_1}(S' \cup X_1) &\underset{(B)}{=} b^{X, X_1}\left(\operatorname{sig}_F^{H, X}(\mathrm{V}(H) \setminus (X_2 \setminus X_1 \setminus a(Q_2)))\right) \\ &\underset{(\mathrm{W})}{=} b^{X, X_1}\left(w^{X, X_2 \setminus X_1 \setminus a(Q_2)}\left(\operatorname{sig}_F^X(H)\right)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Mit $Q = \operatorname{sig}_F^X(H)$ und (10), (11), (12) ergibt sich also

$$\begin{aligned} \operatorname{sig}_F^{H \cup G_2, X_1}(S' \cup S_2 \cup X_1) &= c\left(b^{X, X_1}\left(w^{X, X_2 \setminus X_1 \setminus a(Q_2)}(Q)\right), b^{X_2, X_1 \cap X_2}(Q_2)\right) \\ &=: r^{X_2, X_1}(Q_2, Q). \end{aligned}$$

Es ist nun H genau dann eine zulässige Erweiterung von

$$(G_1 \cup G_2, S_1 \cup S_2)$$

wenn

$$r^{X_2, X_1}(Q_2, Q) \in J_1 \qquad \text{und} \qquad r^{X_1, X_2}(Q_1, Q) \in J_2. \tag{13}$$

Ob die Bedingung (13) gilt, kann in konstanter Zeit überprüft werden. Die Funktion $\bar{c}$ mit

$$\bar{c}\big((Q_1, J_1), (Q_2, J_2)\big) := \\ \big(c(Q_1, Q_2), \{Q \subseteq \mathcal{M}(F, X) : \text{ Bedingung (13) ist erfüllt } \}\big)$$

erfüllt dann gerade (C) aus Problem 2.

Damit sind alle Voraussetzungen erfüllt und es kann völlig analog zum Algorithmus 1 ein Algorithmus angegeben werden, welcher eine Funktion bestimmt, die jeder Signatur

$$(Q \subseteq \mathcal{M}(F, X), J \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M}(F, X))$$

die Größe einer kleinsten Menge mit dieser Signatur zuordnet. Aus der Signatur kann abgelesen werden, ob eine Menge eine maximal F-unabhängige Menge ist. Damit kann die Größe einer kleinsten maximalen F-unabhängigen Menge aus der bestimmten Funktion abgelesen werden.

□

3.3 Universelle Verbinder

In diesem Abschnitt soll ein Verfahren zur Konstruktion von well-F-covered Graphen beschrieben werden. Dabei kommt das gleiche Prinzip wie in Beispiel 2 zum Einsatz, nur F ist jetzt ein beliebiger zusammenhängender Graph.

Definition 5 (Universeller F-Verbinder)**.** Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $X \subseteq \mathrm{V}(G)$. Dann heißt X *universeller-F-Verbinder von* G, falls jeder Graph H der Form

$$H = H_1 \dot\cup \cdots \dot\cup H_k + A$$

well-F-covered ist, wobei $H_1, \ldots, H_k$ zueinander disjunkte Kopien von G mit zu X korrespondierenden Knotenmengen $X_i \subseteq \mathrm{V}(H_i)$ sind und $A \subseteq \binom{Y}{2}$ auf $Y = X_1 \dot\cup \cdots \dot\cup X_k$ eine Kantenmenge von beliebigen Kanten zwischen Knoten aus den Mengen $X_1, \ldots, X_k$ ist.

Bemerkung 3.

- Bisher erlaubt die Definition nur, Kopien des selben Graphen zu verbinden. Es wird sich später zeigen, dass die Bezeichnung *universeller* Verbinder gerechtfertigt ist.
- Falls X ein universeller F-Verbinder von G ist, dann auch $X' \subseteq X$.
- Die leere Menge ist ein universeller F-Verbinder von G genau dann, wenn G well-F-covered ist.

- Y ist ein universeller F-Verbinder von H, wobei Y und H wie in der Definition gegeben sind.

Lemma 6. *Sei X ein universeller F-Verbinder des Graphen G. Dann existiert eine größte F-unabhängige Menge S von G mit $S \cap X = \emptyset$.*

Beweis. Falls $X = \emptyset$ ist die Behauptung trivial, sei also $|X| > 0$. Wähle dann ein $n > |\mathrm{V}(F)| =: k$ und n zueinander disjunkte Kopien $H_1, \ldots, H_n$ von G. Die Mengen $X_1, \ldots, X_n$ bezeichnen die zu X korrespondierenden Knotenmengen aus $H_1, \ldots, H_n$ und $x_1, \ldots, x_{k-1}$ seien beliebig gewählte Knoten mit $x_i \in X_i$ für $i = 1, \ldots, k-1$. Die Vereinigung aller X_i sei mit Y bezeichnet.

Der Graph H ergebe sich dann als

$$H = H_1 \dot\cup \cdots \dot\cup H_k + A,$$

wobei A eine minimale Kantenmenge ist, so dass für den Graphen $U = (Y, A)$ gilt (siehe auch Abbildung 14):

Für alle $y \in X_k \dot\cup X_{k+1} \dot\cup \cdots \dot\cup X_n$ ist $U[\{x_1, \ldots, x_{k-1}, y\}]$ isomorph zu F.

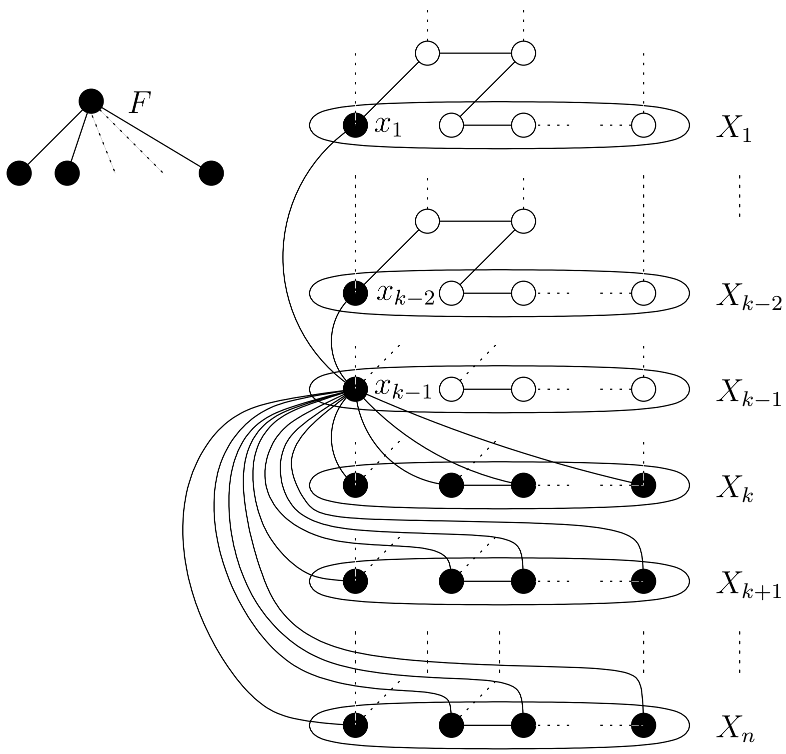


Abbildung 14: Eine F-unabhängige Menge, welche die Knoten $x_1, \ldots, x_{k-1}$ enthält, darf keine Knoten aus den Mengen $X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n$ enthalten

Es sei nun angenommen, dass für jede größte F-unabhängige Menge S von G gilt

$$|S \cap X| > 0.$$

Für jede maximal F-unabhängige Menge R von H mit $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\} \subseteq R$ gilt dann:

$$R \cap X_i = \emptyset \text{ für } i = k, \ldots, n.$$

Somit folgt:

$$|R| \leq n\alpha_F(G) - (n - (k-1)).$$

Sei nun S eine größte F-unabhängige Menge von G und $S_1, \ldots, S_n$ seien die korrespondieren Mengen in den Kopien $H_1, \ldots, H_k$ von G. Da alle Kanten aus A mindestens einen Endknoten in $\{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ haben, ist die Menge

$$T = S_1 \cup \cdots \cup S_n \setminus \{x_1, \ldots, x_{k-1}\}$$

eine F-unabhängige Menge von H und es gilt

$$|T| \geq n\alpha_F(G) - (k-1).$$

Wird n hinreichend groß gewählt ($n > 2k$), dann gilt $|R| < |T|$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass H well-F-covered ist. $\square$

Folgerung 2. *Seien G_i zueinander disjunkte Graphen und $X_i \subseteq \mathrm{V}(G_i)$ seien universelle F-Verbinder von G_i für $i = 1, \ldots, k$. Dann gilt für jede Kantenmenge $A \subseteq \binom{Y}{2}$ auf $Y = X_1 \dot\cup \cdots \dot\cup X_k$ und jeden dadurch gegebenen Graphen $G = G_1 \dot\cup \cdots \dot\cup G_k + A$:*

$$\alpha_F(G) = \alpha_F(G_1) + \cdots + \alpha_F(G_k).$$

Beweis. Nach Lemma 6 existieren für $i = 1, \ldots, k$ größte F-unabhängige Mengen S_i mit $S_i \cap X_i = \emptyset$. Die Vereinigung $S = S_1 \dot\cup \cdots \dot\cup S_k$ dieser Mengen ist eine F-unabhängige Menge von G. $\square$

Folgerung 3. *Falls G keinen zu F isomorphen Untergraphen enthält, dann ist nur die leere Menge ein universeller F-Verbinder von G.*

Beweis. Lemma 6 und $\alpha_F(G) = |\mathrm{V}(G)|$. $\square$

Lemma 7. *Sei X ein universeller F-Verbinder des Graphen G und G' ein Graph mit $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(G') = X$. Dann gilt für jede maximale F-unabhängige Menge S von $G \cup G'$:*

$$|S \cap \mathrm{V}(G)| = \alpha_F(G). \qquad (*)$$

Beweis. Angenommen, es existiert ein Graph G' und eine maximale F-unabhängige Menge S von $G \cup G'$, so dass $(*)$ nicht erfüllt ist. Dann kann die Knotenmenge $\mathrm{V}(G') \setminus X$ mit k weiteren Kopien von G überdeckt werden, das heißt, es existieren zueinander disjunkte Kopien $H_1, \ldots, H_k$ von G, so dass $G \cup G'$ ein Untergraph von

$$H = G \dot{\cup} H_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} H_k + \mathrm{E}(G')$$

ist. Da $|S \cap \mathrm{V}(G)| < \alpha_F(G)$ ist, gilt nun für jede maximale F-unabhängige Menge T von H mit $S \subseteq T$:

$$|T| < (k+1)\alpha_F(G).$$

Nach Folgerung 2 gilt aber

$$\alpha_F(H) = (k+1)\alpha_F(G).$$

Damit ist der Graph H nicht well-F-covered, was ein Widerspruch dazu ist, dass X ein universeller F-Verbinder von G ist. □

Als Folgerung aus Lemma 7 ergibt sich, dass die Bezeichnung *universeller* Verbinder gerechtfertigt ist. Nach Definition 5 ist es bisher nur erlaubt, gleichartige Graphen über eine Kantenmenge zu verbinden.

Aus dem Lemma folgt nun, dass beliebige Graphen bezüglich ihrer universellen Verbinder über Kanten verbunden werden können, so dass ein well-F-covered Graph entsteht:

Folgerung 4. *Seien G_i zueinander disjunkte Graphen und $X_i \subseteq \mathrm{V}(G_i)$ universelle F-Verbinder von G_i für $i = 1, \ldots, k$. $A \subseteq \binom{Y}{2}$ sei eine beliebige Kantenmenge auf $Y = X_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} X_k$. Dann ist der Graph*

$$G = G_1 \dot{\cup} \cdots \dot{\cup} G_k + A$$

well-F-covered.

Beweis. Sei S eine maximale F-unabhängige Menge von G. Dann gilt nach Lemma 7:

$$|S \cap \mathrm{V}(G_i)| = \alpha_F(G_i) \text{ für } i = 1, \ldots, k$$

und damit

$$|S| = \alpha_F(G_1) + \cdots + \alpha_F(G_k) = \alpha_F(G).$$

□

Der folgende Satz liefert eine alternative Definition für universelle F-Verbinder:

Satz 4. *Sei G ein Graph und $X \subseteq \mathrm{V}(G)$. Dann ist X genau dann ein universeller F-Verbinder des Graphen G, wenn für alle Graphen G' mit $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(G') = X$ und jede maximale F-unabhängige Menge S von $G \cup G'$ gilt:*

$$|S \cap \mathrm{V}(G)| = \alpha_F(G). \tag{$*$}$$

Beweis. Die erste Richtung wurde bereits in Lemma 7 bewiesen. Sei also die Bedingung erfüllt. Zu zeigen ist, dass X ein universeller-F-Verbinder von G ist. Dazu seien wieder $H_1, \dots, H_k$ disjunkte Kopien von G und $A \subseteq \binom{Y}{2}$ auf $Y = X_1 \dot\cup \cdots \dot\cup X_k$ eine beliebige Kantenmenge. Die Menge S sei eine maximale F-unabhängige Menge von

$$H = H_1 \dot\cup \cdots \dot\cup H_k + A.$$

Nach $(*)$ gilt

$$|S \cap \mathrm{V}(H_i)| = \alpha_F(H_i) = \alpha_F(G) \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Damit folgt aber

$$|S| = k\alpha_F(G) = \alpha_F(H).$$

Der Graph H ist also well-F-covered und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

3.4 Spezialfall $F = P_3$

Da es im Allgemeinen schwierig erscheint, well-F-covered Graphen oder universelle F-Verbinder von Graphen zu bestimmen, soll in diesem Abschnitt noch einmal auf den Spezialfall $F = P_3$ eingegangen werden.

Zwei einfache Fälle werden im folgenden Beispiel behandelt:

Beispiel 3. *Die well-P_3-covered Wege sind genau P_1, P_2, P_3 und P_6, die well-P_3-covered Kreise sind genau C_3, C_4, C_5 und C_7.*

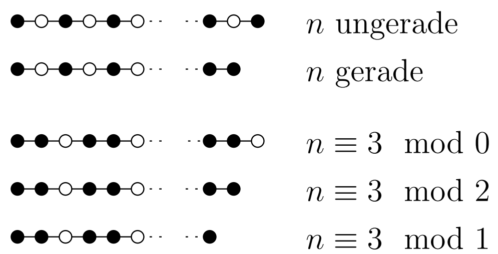


Abbildung 15: Maximal P_3-unabhängige Mengen des P_n

Beweis. Auf jedem Weg P_n existiert ein maximal F-unabhängige Menge S mit

$$|S| \leq \frac{n}{2} + 1$$

und eine maximal F-unabhängige Menge T mit

$$|T| \geq \frac{2n}{3}$$

(siehe Abbildung 15). Für $n \geq 7$ wird damit $|T| > |S|$. Alle Wege ab dem P_7 können somit nicht well-P_3-covered sein. Für $n \leq 3$ ist klar, dass P_n well-P_3 covered ist, für $n = 4, 5, 6$ siehe Abbildung 16.

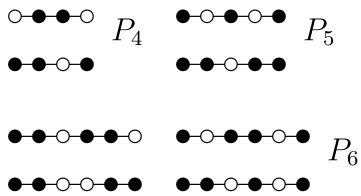


Abbildung 16: Maximal P_3-unabhängige Mengen des P_4, P_5 und P_6

Die maximal P_3-unabhängigen Mengen des P_n aus Abbildung 15 ergeben auch maximal P_3-unabhängige Mengen des C_{n+1}. Damit folgt, dass ab dem C_8 alle Kreise nicht mehr well-P_3-covered sind.

Siehe Abbildung 17 für $n = 4, 5, 6, 7$.

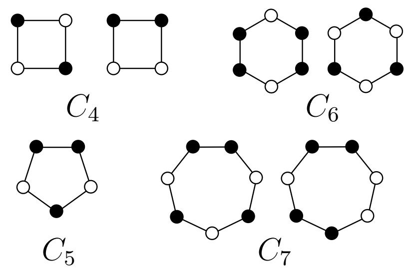


Abbildung 17: Maximal P_3-unabhängige Mengen des C_4, C_5, C_6 und C_7

□

Beispiel 4. *Die Graphen C_5, H_1 und H_2 (das Komplement des Peterson Graphen) sind genau die 2-fach zusammenhängenden well-P_3-covered Graphen bis 10 Knoten mit $\alpha_{P_3} = 3$ und die Graphen H_3, H_4, H_5 und H_6 sind genau die 2-fach zusammenhängenden well-P_3-covered Graphen bis 10 Knoten mit $\alpha_{P_3} = 5$ (Abbildung 18). Der Beweis wurde mit einem Computerprogramm durchgeführt (siehe Anhang A).*

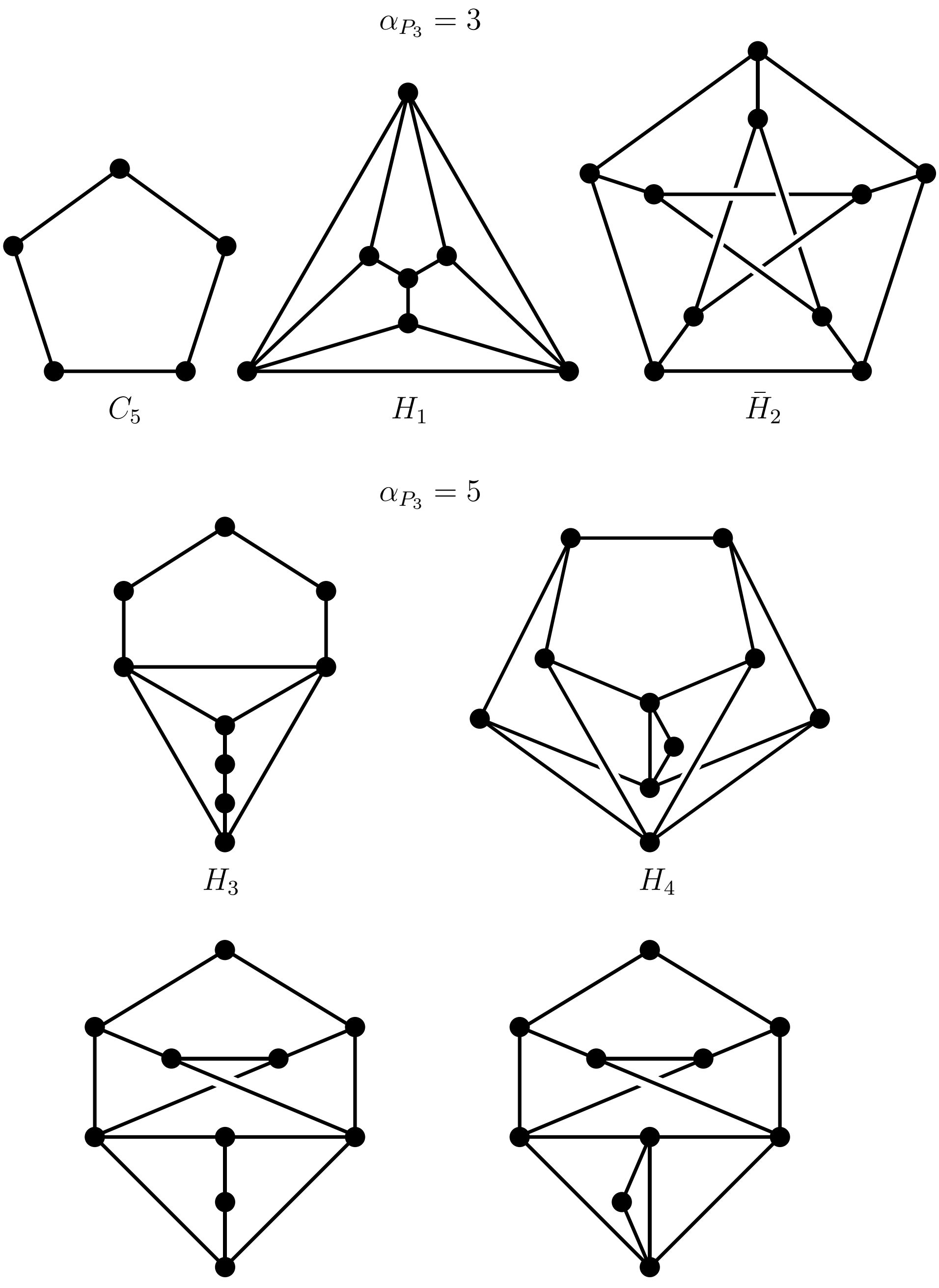


Abbildung 18: Liste aller 2-fach zusammenhängenden well-P_3-covered Graphen bis 10 Knoten mit $\alpha_{P_3} = 3, 5$

Im Spezialfall $F = P_3$ lässt sich Satz 4 noch in einer einfacheren Form formulieren.

Satz 5. *Sei G ein Graph und $X \subseteq \mathrm{V}(G)$. Dann ist X genau dann ein universeller P_3-Verbinder von G, wenn für alle Mengen $X_0, X_1 \subseteq X$ mit X_1 unabhängig und $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ gilt:*

(i) $G - X_0 - \mathrm{N}_G[X_1]$ *ist well-P_3-covered*

(ii) $\alpha_{P_3}(G - X_0 - \mathrm{N}_G[X_1]) + |X_1| = \alpha_{P_3}(G)$

Beweis. Anwendung des Satzes 4: Sei X ein universeller P_3-Verbinder von G und ein Graph G' mit $(X_0 \cup X_1) \subseteq \mathrm{V}(G')$ sei wie folgt konstruiert (siehe Abbildung 19):

- Mit jedem $x \in X_0$ ist ein Endknoten einer Kopie des P_3 verklebt.
- Mit jedem $x \in X_1$ ist ein Endknoten einer Kopie des P_2 verklebt.
- Die verklebten Kopien von P_2, P_3 seien dabei zueinander disjunkt.

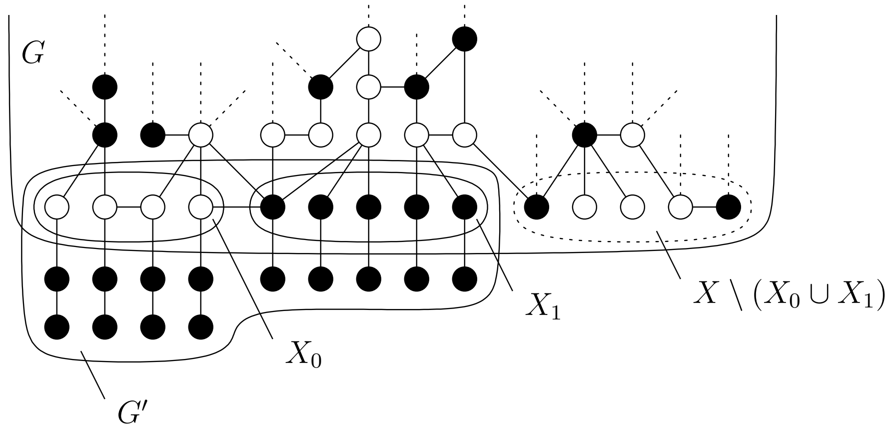


Abbildung 19: Konstruktion eines Graphen G' entsprechend der Mengen X_0 und X_1

Die Menge T sei eine maximale P_3-unabhängige Menge von $G - X_0 - \mathrm{N}_G[X_1]$. Dann ist

$$S = T \cup \mathrm{V}(G') \setminus X_0$$

eine maximale P_3-unabhängige Menge von $G \cup G'$ für die nach Voraussetzung gilt:

$$|S \cap \mathrm{V}(G)| = \alpha_{P_3}(G).$$

Mit $|S \cap \mathrm{V}(G)| = |T| + |X_1|$ folgt die Behauptung.

Zu zeigen bleibt noch die zweite Richtung. Sei (i) und (ii) erfüllt, G' ein beliebiger Graph mit $\mathrm{V}(G) \cap \mathrm{V}(G') = X$ und S eine maximale P_3-unabhängige Menge von $G \cup G'$. Wegen Satz 4 ist zu zeigen, dass

$$|S \cap \mathrm{V}(G)| = \alpha_{P_3}(G).$$

Setze dazu (Abbildung 20):

$$X_0 = X \setminus S,$$
$$X_1 = \{x \in S \cap X : S \cap (\mathrm{N}_{G'}(x) \setminus X) \neq \emptyset\}.$$

Die Menge X_1 enthält alle Knoten aus X, welche in $\mathrm{V}(G') \setminus X$ mindestens einen Nachbarn haben. Damit ist X_1 eine unabhängige Menge und es gilt $\mathrm{N}_G(X_1) \cap S = \emptyset$. Es ist nun leicht einzusehen, dass die Menge $T = S \cap \mathrm{V}(G) \setminus X_1$ eine maximale P_3-unabhängige Menge von $G - X_0 - \mathrm{N}_G[X_1]$ ist:

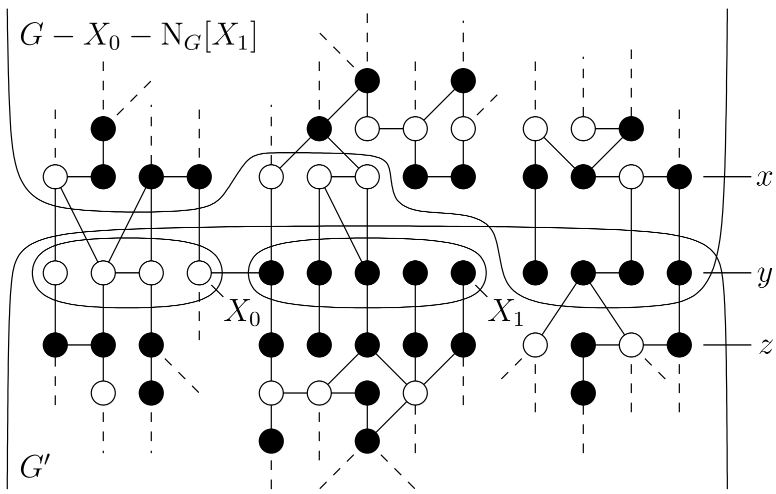


Abbildung 20: $S \cap \mathrm{V}(G) \setminus X_1$ ist eine maximale P_3-unabhängige Menge von $G - X_0 - \mathrm{N}_G[X_1]$

Angenommen, es existiert ein $x \in \mathrm{V}(G - X_0 - \mathrm{N}_G[X_1]) \setminus T$ so dass $T \cup \{x\}$ P_3-unabhängig bleibt. Da $x \notin S$ und S eine maximale P_3-unabhängige Menge ist, existieren Knoten $y, z \in S$, so dass x, y, z einen P_3 in $G \cup G'$ ergeben. Weil $T \cup \{x\}$ P_3-unabhängig ist, kann O.B.d.A. angenommen werden, dass $z \notin T$ ist. Keiner der beiden Knoten y und z kann in X_0 oder $\mathrm{N}_G(X_1)$ liegen, womit $z \in \mathrm{V}(G') \setminus X$ folgt. Da aber z mit x verbunden ist und der Zusammenhang der Graphen G und G' nur über die Menge X gegeben ist, folgt $y \in X$ und da y den Knoten x dann als Nachbarn hat, $y \in X_1$. Das ist aber ein Widerspruch. $\square$

Unter Anwendung von Satz 5 können die P_3-Verbinder von kleinen Graphen mit einem Computerprogramm (siehe Anhang A) überprüft werden.

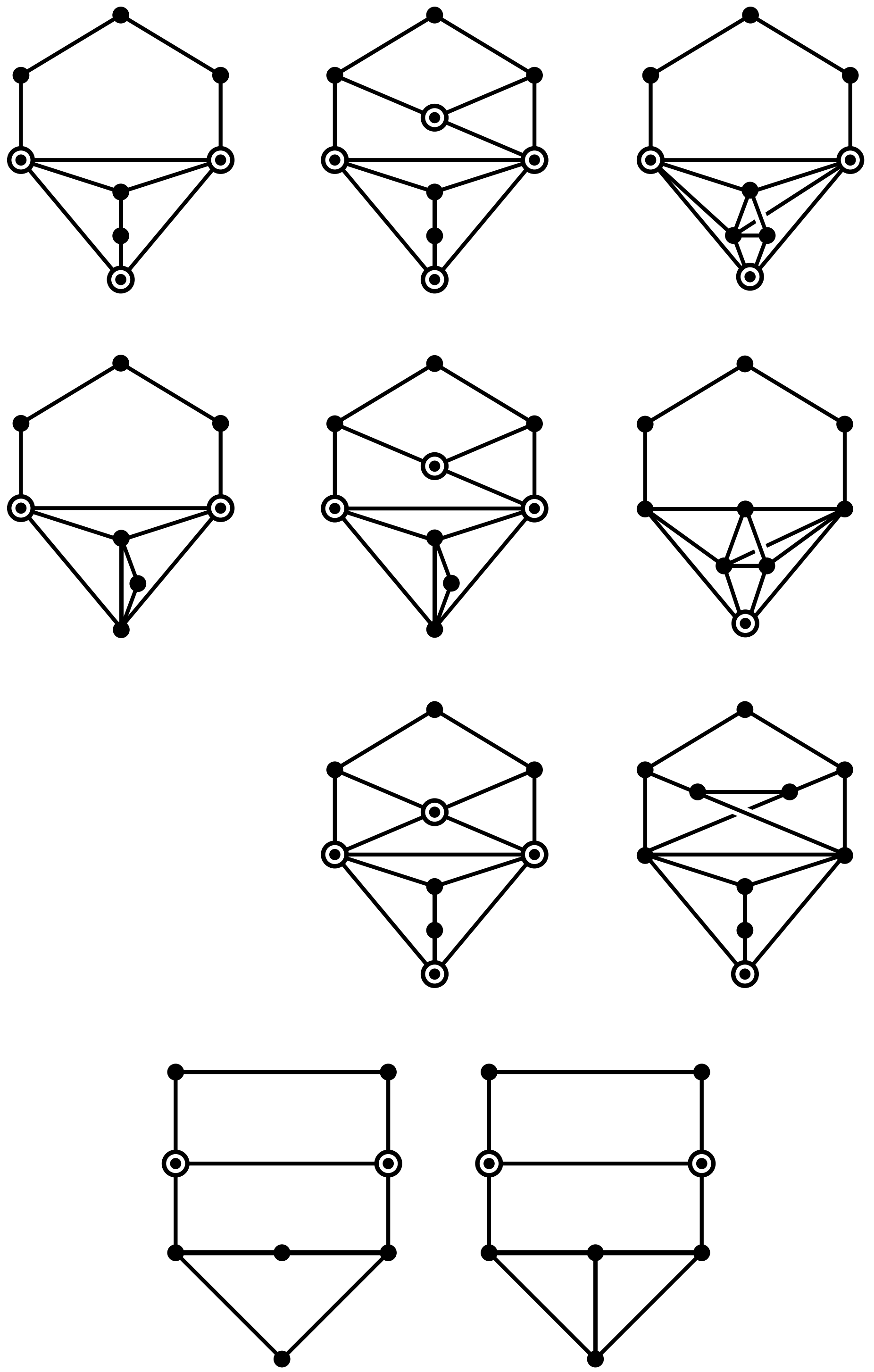


Abbildung 21: Ausgewählte well-P_3-covered Graphen mit ihren maximalen Verbindern

Beobachtung 9. *Sei G ein zusammenhängender Graph, $\alpha_{P_3}(G) = 2$ und $X \subseteq \mathrm{V}(G)$. Dann ist X genau dann ein universeller P_3-Verbinder, wenn gilt:*

(i) Für alle $x \in X$ existiert ein $y \in \mathrm{V}(G)$ mit $\mathrm{d}_G(x,y) = 2$.

(ii) $G[X]$ ist isomorph zu $K_{|X|}$.

Beweis. Die erste Richtung wurde bereits in Beispiel 2 gezeigt, die zweite Richtung wird mit Hilfe von Satz 5 bewiesen.

Angenommen (i) ist nicht erfüllt, das heißt, es existiert ein $x \in X$, so dass $\mathrm{d}_G(x,y) \leq 1$ für alle $y \in \mathrm{V}(G)$. Setze dann $X_0 = \emptyset$ und $X_1 = \{x\}$, dann ist $G - X_0 - \mathrm{N}[X_1]$ der leere Graph und somit

$$\alpha_{P_3}(G - X_0 - \mathrm{N}[X_1]) + |X_1| = 1 \neq 2 = \alpha_{P_3}(G).$$

Ist $G[X]$ nicht isomorph zu $K_{|X|}$, dann existieren $x, y \in X$ mit $xy \notin \mathrm{E}(G)$ und es gibt kein $z \in \mathrm{V}(G)$ mit $z \neq x, y$ und $\mathrm{d}_G(x,z) > 1$, denn sonst wäre $\alpha_{P_3}(G) > 2$. Setze nun $X_0 = \{y\}$ und $X_1 = \{x\}$, dann ist $G - X_0 - \mathrm{N}[X_1]$ wieder der leere Graph und es ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 5. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Konstruktion beliebig großer zusammenhängender well-P_3-covered Graphen mit beliebig großem Zusammenhang möglich ist.

Beispiel 5. *Sei $G = K_{2n} - M$ mit einem perfekten Matching M. Dann ist $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ genau dann ein universeller P_3 Verbinder, falls $G[X]$ isomorph zu $K_{|X|}$ ist. Der Graph G enthält offensichtlich einen K_n als Untergraphen und der Zusammenhang des Graphen ist $2n - 2$. Es lassen sich somit well-P_3-covered Graphen mit beliebig großem Zusammenhang und beliebig großem α_{P_3} konstruieren.*

Zum Abschluss noch eine weitere Anwendung des Satzes 5: Die beiden Probleme, festzustellen, ob $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ ein universeller P_3-Verbinder eines Graphen G ist und ob ein Graph well-P_3-covered ist, haben die gleiche Schwierigkeit.

Folgerung 5. *Falls ein Orakel gegeben ist, welches für beliebige Graphen G' bestimmt, ob der Graph G' well-P_3-covered ist, dann kann ein polynomieller Algorithmus angegeben werden, welcher unter Befragung des Orakels bestimmt, ob für einen Graphen G die Teilmenge $X \subseteq \mathrm{V}(G)$ ein universeller P_3-Verbinder von G ist.*

Beweis.

Der Algorithmus konstruiert einen Graphen G' (Abbildung 23) wie folgt:

- Gestartet wird mit dem Graphen G.

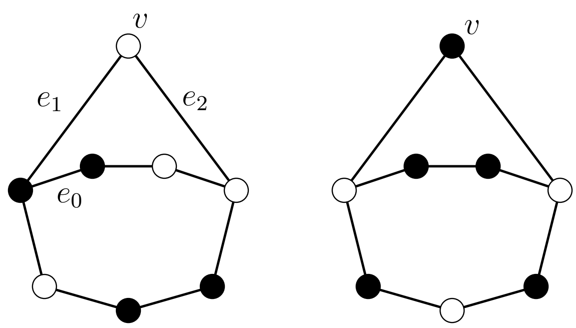


Abbildung 22: In dem in H enthaltenen C_7 sind in jeder maximal P_3-unabhängigen Menge 4 Knoten gewählt

- Mit jedem Knoten $x \in X$ von G wird eine Kopie des Graphen H (siehe Abbildung 22) in v verklebt.

Der Graph H hat einen C_7 als induzierten Untergraphen und in diesem C_7 werden in jeder maximal P_3-unabhängigen Menge von H genau 4 Knoten ausgewählt, unabhängig davon, ob der Knoten v gewählt wurde oder nicht.

Es wirt jetzt gezeigt, dass der Graph G' genau dann well-P_3-covered ist, wenn X ein universeller P_3-Verbinder von G ist.

Um die erste Richtung zu beweisen, sei angenommen, dass der Graph G' well-P_3-covered ist. Weiterhin seien $X_0, X_1 \subseteq X$ beliebige Mengen mit $X_0 \cap X_1 = \emptyset$ und X_1 unabhängig. Es ist zu zeigen, dass für jede maximale P_3-unabhängige Menge S von $G - X_0 - N_G[X_1]$ gilt:

$$|S| + |X_1| = \alpha_{P_3}(G).$$

Sei also S eine maximale P_3-unabhängige Menge von $G - X_0 - N_G[X_1]$. Dann wird eine maximale P_3-unabhängige Menge $T \subseteq \mathrm{V}(G')$ so gewählt, dass

- $S \subseteq T$.
- Für $x_0 \in X_0$ sind in der jeweiligen Kopie von H die Knoten der Kante e_0 gewählt.
- Für $x_1 \in X_1$ sind in der jeweiligen Kopie von H die Knoten der Kante e_1 gewählt.

Damit ist $T \cap \mathrm{V}(G - X_0 - N_G[X_1]) = S$ und es gilt:

$$|S| = |T| - 4|X| - |X_1|.$$

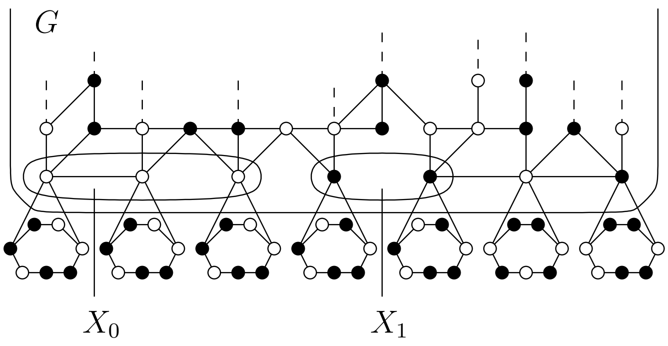


Abbildung 23: Die Kopien des Graphen H dienen als neutrale Schalter, um die Mengen X_0 und X_1 zu erzeugen

Sei nun umgekehrt X ein universeller P_3-Verbinder des Graphen G und T eine maximale P_3-unabhängige Menge von G'. Es werden Mengen X_0 so gewählt, dass:

$$X_0 = X \setminus T,$$

$$X_1 = \{x \in X : \text{ die Kante } e_1 \text{ oder } e_2 \text{ der jeweiligen Kopie von } H \text{ ist in } T \text{ enthalten } \}.$$

Nach Voraussetzung und Satz 5 ist dann $S = T \cap \mathrm{V}(G - X_0 - N_G[X_1])$ eine maximale P_3-unabhängige Menge in $G - X_0 - N_G[X_1]$ mit

$$|S| + |X_1| = \alpha_{P_3}(G).$$

Aufgrund der Eigenschaften des Graphen H ist aber nun:

$$|S| = |T| - 4|X| - |X_1|$$

und somit

$$|T| = \alpha_{P_3}(G) + 4|X|.$$

Die Behauptung ist damit gezeigt. $\square$

Ergebnisse

In dieser Arbeit wurde ein Algorithmus mit linearer Laufzeit angegeben, welcher eine größte F-unabhängige Menge eines Graphen G mit beschränkter Baumweite findet. Als Hilfsmittel wurde dazu eine spezielle Signatur für jede Knotenmenge des Graphen eingeführt, welche nur Informationen bezüglich einer kleinen Knotenmenge X des Graphen enthält. Die Mengen gleicher Signatur wurden in Klassen zusammengefasst und es wurde gezeigt, dass ein Algorithmus nur eine jeweils größte Menge einer solchen Klasse finden muss.

Für den Spezialfall $F = P_3$ wurde eine weitere Graphenklasse angegeben, deren Graphen eine beliebig große Baumweite haben können, für welche sich jedoch immer noch in Polynomialzeit eine größte P_3-unabhängige Menge finden lässt.

Diese Graphen haben letztendlich zur Einführung der well-F-covered Graphen geführt. Für einen Graphen dieser Klasse ist jede maximale F-unabhängige Menge zugleich auch eine größte. Hier wurde der Fall $F = P_3$ näher untersucht und ein Konstruktionsverfahren für well-P_3-covered Graphen angegeben.

Offen bleibt, ob sich dieses Verfahren auch für allgemeines F übertragen lässt. Auch konnte die Frage nach der Komplexität des Problems, zu entscheiden ob ein Graph well-F-covered ist, nicht beantwortet werden.

Die konstruierten Beispiele lassen vermuten, dass die Fragestellung eine sehr schwierige ist. Der Autor neigt zu der Annahme, dass das Problem zumindest im Fall $F = P_3$ co-NP-schwer ist.

Literatur

[1] S. Arnborg, D.G. Corneil, and A. Proskurowski. Complexity of finding embeddings in a k-tree. *SIAM J. Alg. Discr. Meth.*, 8:277–284, 1987.

[2] Hans L. Bodlaender. A Linear Time Algorithm for Finding Tree-decompositions of Small Treewidth. *SIAM Journal on Computing*, 25:1305–1317, 1996.

[3] Hans L. Bodlaender. Treewidth: Characterizations, Applications, and Computations. Technical report, Institute of Information and Computing Sciences, Utrecht University, 2006.

[4] Hans L. Bodlaender and Arie M. C. A. Koster. Combinatorial Optimization on Graphs of Bounded Treewidth. *The Computer Journal*, 2007.

[5] V. Chvátal and P. J. Slater. A note on well-covered graphs. *Ann. Discrete Math*, 55:179–182, 1993.

[6] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs I: Recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85:12–75, 1990.

[7] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs III: Tree-decompositions, minors and complexity issues. *Inform. Théor. et Applications*, 26:257–286, 1992.

[8] F. Göring, J. Harant, D. Rautenbach, and I. Schiermeyer. On f-independence in graphs. Preprint No. M 05/07, TU Ilmenau, Fak. f. Math. u. Naturwiss., 2007.

[9] M.D. Plummer. Some covering concepts in graphs. *J. Combinatorial Theory*, 8:91–98, 1970.

[10] H. Röhrig. Tree decomposition: A feasibility study. Master's thesis, Max-Planck-Institut für Informatik, Saarbrücken, 1998.

Erklärung

Ich erkläre an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Chemnitz, den 1. November 2007 Daniel Seidewitz

A Testprogramm für kleine Graphen

Die Beispiele aus Abschnitt 3 wurden mit einem in C/C++ implementierten Programm generiert und überprüft. Der Quelltext des Programms ist auf CD-ROM enthalten. Jede Permutation einer Knotenfolge eines Graphen erzeugt eine maximale P_3-unabhängige Menge. Werden alle Permutationen überprüft, kann bestimmt werden, ob der Graph well-P_3-covered ist.

Um eine möglichst große Anzahl von Graphen schnell zu überprüfen und alle Graphen, welche nicht well-P_3-covered sind, in wenigen Iterationen zu finden, werden die Knoten eines Graphen zunächst einmal aufsteigend und einmal absteigend nach ihrem Grad sortiert. Ausgehend von diesen Startfolgen werden bis zu einem gewissen Schwellenwert alle Permutationen überprüft, danach nur noch die Permutation einer Folge.

Auf universelle P_3-Verbinder eines Graphen wird mit Hilfe von Satz 5 getestet. Für alle zulässigen Testmengen X_0 und X_1 wird überprüft, ob der Graph nach Löschen der Knoten $X_0 \cup \mathrm{N}_G[X_1]$ well-P_3-covered bleibt.

Als Eingabe erwartet das Programm eine Liste von Graphen im *graph6* Format. Eine Dokumention des Formats sowie eine Liste aller zusammenhängenden Graphen bis 10 Knoten, generiert mit dem Programm *nauty*[1], liegt auf CD-ROM bei.

zusammenhängende Graphen

Anzahl Knoten	Graphen bis auf Isomorphie	davon well-P_3-covered
4	6	3
5	21	4
6	112	5
7	853	13
8	11117	65
9	261080	306
10	11716571	2372

2-fach zusammenhängende Graphen

Anzahl Knoten	Graphen bis auf Isomorphie	davon well-P_3-covered
4	3	3
5	10	4
6	56	4
7	468	8
8	7123	49
9	194066	273
10	9743542	2294

Tabelle 1: well-P_3-covered Graphen

[1]Brendan McKay, http://cs.anu.edu.au/people/bdm/nauty/