

Vektoranalysis

3. Übung – Oberflächenintegrale, Integralsätze

1. Verwende den Gaußschen Integralsatz der Ebene zur Berechnung von

(a) $\oint_{\Gamma} ((\cos x \sinh y - xy^2)dx + (\sin x \cos hy + x^2y)dy),$

Γ : Kreis $x^2 + y^2 = a^2$ (Ergebnis 0).

(b) $\oint_{\Gamma} [(xe^x + \sin y)dx + (\sin^2 y + x \cos y)dy],$

Γ : $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$ (Ergebnis 0).

(c) $\iint_B \frac{x^4 - y^4}{x^2 y^2} d(x, y)$ B ist die Fläche, die von den Kurven $x^2 + y^2 = 10,$
 $y = 3/x, y = x$ begrenzt wird und die Eckpunkte
(Ergebnis $4/3$) $P_1(3, 1), P_2(\sqrt{5}, \sqrt{5}), P_3(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ hat.

2. Berechne den Flächeninhalt des Teils des Zylinders $2z = x^2$, der von den Ebenen $y = x/2, y = 2x, x = 2\sqrt{2}$ begrenzt wird ! (Ergebnis 13)

3. Berechne den Flächeninhalt des Teils der Fläche $z^2 = 2xy (z > 0)$, der von den Ebenen $x = 0, x = a, y = 0, y = b (a, b > 0)$ begrenzt wird! (Ergebnis $\frac{2}{3}\sqrt{2ab}(a + b)$)

4. Berechne den Flächeninhalt des Teils des Paraboloids $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} (a, b > 0)$, der vom Zylinder $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ausgeschnitten wird. (Ergebnis $\frac{2\pi}{3}ab(2\sqrt{2} - 1)$)

5. Zeige $\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = 0$, wenn $f(u)$ stetig und C stückweise glatt und geschlossen ist.

6. Berechne das Oberflächenintegral 2. Art $\int_S \vec{v} d\vec{S}$

(Bez. $\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ Ortsvektor zum Punkt $P(x, y, z)$)

(a) $v(\vec{r}) = \vec{r}, S : x + y + z = a (a > 0), x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
(Normale zeige nach oben) (Ergebnis $\frac{1}{2} a^3$)

(b) $v(\vec{r}) = \vec{r}, S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
(Normalenvektor zeige nach außen) (Ergebnis $4\pi a^3$)

(c) $v(\vec{r}) = (x, y, (z - 1)) S : z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 4$
(Normalenvektor zeige nach unten) (Ergebnis 12π)

Zusatz: $v(\vec{r}) = (x^3, y^3, z^3), S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

(Normalenvektor zeige nach außen) (Ergebnis $\frac{12\pi}{5}a^5$).

7. Berechne für das Vektorfeld $v(\vec{r}) = (xe^y, xe^z, ze^x)$ den Fluß durch die Fläche $y^2 + z^2 = a^2, -1 \leq x \leq 1$. (Normalenvektor zeige nach außen) (Ergebnis $2\pi a^2 \sinh 1$).
8. Berechne für das Vektorfeld $v(\vec{r}) = (y, -x, z)$ den Fluß durch eine Windung der Schraubenfläche (der Normalenvektor zeige nach oben) $\vec{r} = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, \frac{h}{2\pi} \varphi)$ ($0 \leq \varrho \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) (Ergebnis $\frac{a^2}{2} h(1 + \pi)$).
9. Löse die Aufgaben 6b, c, (**Z**) mit Hilfe des Satzes von Gauß.
10. Berechne $\int_S \vec{v} d\vec{S}$ mit $v = (x, y, yz^2)$ wenn S die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels mit Mittelpunkt im Ursprung und Kantenlänge 2 ist (Normale zeige nach außen) (Ergebnis 16).
11. Ein Vektorfeld v sei in $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100, z \geq 5\}$ mit Hilfe der Vektorfunktion $v(x, y, z) = (xz, -10, y^2)$ definiert. Berechne den Fluß durch die Oberfläche von K
 - (a) ohne Benutzung des Integralsatzes von Gauß,
 - (b) mit Benutzung des Integralsatzes von Gauß (Ergebnis $9 \cdot 10^4 \pi / 64$).
12. Zeige mit Hilfe des Stokeschen Satzes, dass das Kurvenintegral $\int_{\Gamma} (yzdx + xzdy + xydz)$ vom Weg unabhängig ist.
13. Berechne $\oint_{\Gamma} [x(z - y)dx + y(x - z)dy + z(y - x)dz]$, wobei Γ das Dreieck mit den Eckpunkten $A(a, 0, 0), B(0, a, 0), C(0, 0, a)$ (durchlaufen von A über B nach C zurück nach A)
 - (a) unter Benutzung einer Parameterdarstellung des Integrationsweges,
 - (b) unter Verwendung des Stokeschen Satzes (Ergebnis a^3).

Zusatz: Berechne $\int_S \vec{v} d\vec{S}$, wenn S die Oberfläche des gesamten Zylinders $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq h$ und $v(\vec{r}) = \vec{r}$ ist (Normale nach außen).
 (a) mit Gauß, (b) ohne Gauß, (Ergebnis $3\pi h$).