Vektoranalysis

2. Übung –Kurvenintegrale 1. Art und 2. Art

---

1. Berechnen Sie mit Hilfe eines Kurvenintegrals den Umfang
   (a) des Kreises mit Radius R,
   (b) der Astroide ($x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, 0 \leq t \leq 2\pi$).
2. Berechnen Sie die Länge
   (a) eines Bogens der Zykloide ($x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)\ , 0 \leq t \leq 2\pi$),
   (b) der Kardioide ($r = a(1 + \cos\varphi),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$).
   (Z) Zeigen Sie, dass die Berechnung der Länge der Lemniskate.
   $$(a^2\cos 2\varphi = r^2, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$$
   mittels Kurvenintegral auf ein binomisches Integral führt.
3. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale:
   (a) $\int\limits_\Gamma (x^2 + y^2)ds$, $\quad\Gamma$: Strecke von (a, a) bis (b, b),
   (b) $\int\limits_\Gamma y ds$, $\quad\Gamma$: Parabelbogen $y^2 = 2px$ von (0,0) bis $(1, \sqrt{2p})$,
   (c) $\int\limits_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2}\, ds$, $\quad\Gamma : r = e^\varphi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$,
   (d) $\int\limits_\Gamma xy ds$, $\quad\Gamma : \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ x \geq 0, y \geq 0\right\}$,
   (e) $\int\limits_\Gamma \sin 2x ds$, $\quad\Gamma$: Cosinuskurve von $x = 0$ bis $x = t$,
   (f) $\int\limits_\Gamma xyz\, ds$, $\quad\Gamma$ geg. durch $x = t, y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}, z = \frac{1}{2}t^2$, $0 \leq t \leq 1$
   (Ergebnis $\frac{16\sqrt{2}}{143}$).
4. Berechnen Sie die Länge der Kurve
   $$x = e^{-t}\cos t, y = e^{-t}\sin t, z = e^{-t}(0 \leq t \leq \infty)$$
   (Ergebnis $\sqrt{3}$).
5. Man berechne die Masse des Bogens der Kurve $y = \ln x$ zwischen den Punkten mit den Abszissen x_1 und x_2, wenn die Dichte der Kurve in jedem Punkt gleich dem Quadrat seiner Abszisse ist.
   (Ergebnis $\frac{1}{3}[(x_2^2 + 1)^{\frac{3}{2}} - (x_1^2 + 1)^{\frac{3}{2}}]$).

6. Berechnen Sie folgende Kurvenintegrale 2. Art
   (a) $\int\limits_\Gamma (x+y)dx + (x-y)dy \quad$ mit $\quad \Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ positiv orientiert,
   (b) $\int\limits_\Gamma (-ydx + xdy)$ mit Γ Streckenzug von (0,0) über (1,0) nach (1,1).
7. Man bestimme den Wert des Kurvenintegrals $I = \int\limits_\Gamma (2xydx + x^2dy)$ über einen Weg Γ, der die Punkte (0,0) und (1,1) durch
   (a) die Gerade $\quad y = x$,
   (b) die Parabel $\quad y = x^2$,
   (c) die Parabel $\quad y^2 = x$,
   (d) die kubische Parabel $\quad y = x^3$

   verbindet!
8. Man berechne $I = \int\limits_\Gamma xydx + (y-x)dy$ über die Integrationswege $a - d$ aus (7)

$$\left(\text{Ergebnis: a) } \frac{1}{3}, \quad \text{b) } \frac{1}{12}, \quad \text{c) } \frac{7}{30}, \quad \text{d) } -\frac{1}{20}\right).$$

9. Berechnen Sie:

$$\int\limits_\Gamma \left[(y+3z)dx + (2z+x)dy + (3x+2y)dz\right],$$

   wenn Γ gegeben ist durch $x = a\cos\varphi,\ y = a\sin\varphi,\ z = \frac{2a\varphi}{\pi}$ von (a,0,0) bis (0,a,a).
   (Ergebnis $2a^2$)
10. Berechnen Sie

$$\oint\limits_\Gamma \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2 + 1}$$

   mit Γ Rand des kleinen Segmentes, das durch $x + y = 1$ und $x^2 + y^2 = 1$ definiert und im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird.