Vektoranalysis

1. Übung – Bereichsintegrale

---

1. Man bestimme die Integrationsgrenzen von

$$\iint\limits_B f(x,y)d(x,y)$$

bei Zurückführung dieses Integrals auf ein Doppelintegral für

a) B sei das Dreieck mit den Eckpunkten in $A=(0,0), B=(1,1), C=(1,0)$

b) B sei das Dreieck mit den Eckpunkten in $A=(0,0), B=(2,0), C=(1,1)$

c) B wird begrenzt durch $x=0,\ y=1,\ y^2=x$.

2. Vertausche die Integrationsreihenfolge

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx$ b) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

c) $\displaystyle\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$ d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a\cos\varphi} f(\varphi,r)drd\varphi$

3. Berechne

a) $\displaystyle\iint\limits_B xd(x,y),$ $B=\{(x,y): x^2+(y-1)^2\leq 1, y\leq -x+2\}$

b) $\displaystyle\iint\limits_B (x^2+y)d(x,y),$ B endl. Gebiet, das von den Parabeln $y=x^2$ und $y^2=x$ begrenzt wird.

c) $\displaystyle\iint\limits_B \left(\frac{x}{y}\right)^2 d(x,y),$ B wird von $y=x, x=2, xy=1$ begrenzt

Z) $\displaystyle\iint\limits_B yd(x,y),$ B Gebiet zwischen einem Zykloidenbogen und der x-Achse.

(Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge)

4. a) Das Integral

$$\iint\limits_B \sqrt{1-x^2-y^2}\ \ d(x,y)$$

mit B der Einheitskreis ist durch Übergang in Polarkoordinaten zu berechnen.

b) Schreiben Sie das Integral

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dydx$$

auf Polarkoordinaten um!

b.w.

Zusatz

Berechne das Integral $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

5. Bestimme mit Hilfe eines Doppelintegrals das Volumen des Körpers, der durch das elliptische Paraboloid $z = 2x^2+y^2+1$, die Ebene $x+y = 1$ und die Koordinatenebenen begrenzt wird.

6. Der Inhalt welches Körpers wird durch das folgende Doppelintegral ausgedrückt

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dydx \ \ ?$$

7. Berechne mit einem Raumintegral das Volumen des Körpers, der durch die Flächen $x^2+y^2 = a^2, x^2+z^2 = a^2$ begrenzt wird.

8. Berechne das Raumintegral $\int\int\limits_B\int f(x,y,z)d(x,y,z)$ für

   a) $f(x,y,z) = xyz$, B wird begrenzt von $z^2 = x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2 = 8, x = 0, y = 0,$ wobei $x, y, z \geq 0$

   b) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, B wird begrenzt von den Flächen $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$ und $z = \ c$ mit $c > 0$

9. Berechne das Volumen des Körpers, der von der Kugel $x^2+y^2+z^2 = R^2$ aus dem Zylinder $x^2+y^2 \leq \dfrac{R^2}{4}$ herausgeschnitten wird.

10. Man bestimme die Masse und die Lage des Schwerpunktes der Kugel $x^2+y^2+z^2 \leq 2az$, wenn die Dichte in den Kugelpunkten dem Abstand dieser Punkte vom Koordinatenursprung umgekehrt proportional ist.

11. Ein Körper habe die Form eines Kegelstumpfes (Radien a, b, Höhe h). Berechne das Trägheitsmoment bzgl. seiner Achse für Dichte $\rho = 1$.

12. Berechne das Trägheitsmoment der in Zylinderkoordinaten gegebenen Lemmiskatenfläche

$$r^2 \leq 2a^2\cos 2\varphi, \quad z = 0, \quad \frac{-\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

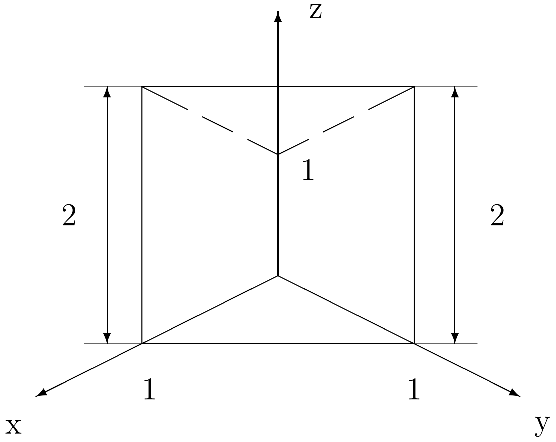
bzgl. der z-Achse für $\rho = 1$.

13. Berechnen Sie das Raumintegral

$$\int\int\limits_B\int f(x,y,z)d(x,y,z), \text{ wenn } f(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z+1)^3}$$

und B der Bereich ist, der von den Ebenen $x = 0, y = 0, z = 0, x+y+z = 1$ begrenzt wird.

14. Stellen Sie das Raumintegral zur Berechnung des Volumens vom folgenden Prisma auf.



15. Berechne die Masse des Körpers B, wenn die Dichte $\rho(x, y, z) = e^{x^2+y^2}$ und $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$ ist.

16. Berechnen Sie die Ladung eines Ellipsoids, wenn die Ladungsdichte

$$\rho(x, y, z) = 1 - \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2}$$

beträgt (a, b, c seien die Halbachsen des Ellipsoids).