

Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

Weihnachtsübung

1. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnummerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat.)
 - (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
 - (b) 1100 Gäste reisen ab. Wie ist die Belegung des Hotels?
 - (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
 - (d) Derartige Hotels stehen auf allen Sternen. Aufgrund der Weihnachtsfeiertage im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstandenen Zimmerbedarf decken?
 - (e) Bei der Jahresendabrechnung wird der Hotelchef vom gastronomischen Zentrum gebeten, alle möglichen Zimmerbelegungen aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnummerierte Varianten auf. Das gastronomische Zentrum ist jedoch nicht zufrieden. Warum?
2. Sind folgende Mengen abzählbar?
 - (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[n]{m} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}\}$,
 - (b) Menge der Primzahlen,
 - (c) \mathbb{N}^k mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,
 - (d) die Menge aller Zahlenfolgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x_n \in \{0, 1\}$.
3. Die Fibonacci Zahlen werden rekursiv wie folgt definiert:

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Zeigen Sie:

- (a) $1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = F_{n+1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2,$
- (b) $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n, n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ (Hinweis: Induktion nach k)
- (c) $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, n \in \mathbb{N}$
- (d) F_n erlaubt die explizite Darstellung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

4. Geben Sie durch Selbstversuch die Gruppentafel für die Sockengruppe V_4 an, deren Elemente a, b, c, d durch folgende Handlungen definiert sind. (Ausgangssituation ist ein mit einer Socke bekleideter Fuß, der andere ist nackt!)
 - a: Sie machen nichts!
 - b: Sie ziehen die Socke aus und über den anderen Fuß!
 - c: Sie ziehen die Socke aus, wenden sie und ziehen sie über den gleichen Fuß!
 - d: Sie ziehen die Socke aus, wenden sie und ziehen sie über den anderen Fuß!

Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung dieser Handlungen!

Welche Ordnung haben die Elemente a, b, c, d ?

Ist V_4 isomorph zur Gruppe E_4 aus Aufgabe 1 der 4. Übung?

5. Betrachten Sie die Menge F folgender 4 Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Als Verknüpfung sei die Hintereinanderausführung „ \circ “ gewählt:

$$(f_i \circ f_j)(x) = f_i(f_j(x)) \quad (i, j \in \{1, 2, 3, 4\}).$$

Zeigen Sie, dass $\langle F, \circ \rangle$ eine Gruppe ist, die zur Gruppe V_4 aus Aufgabe 4 isomorph ist!

Weihnachtshausaufgabe

Lösen Sie mindestens zwei der Aufgaben der Weihnachtsübung!