Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

8. Übung

1. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$, wobei die algebraische Vielfachheit von λ_1 gleich 3, die von λ_2 gleich 2 sein soll. Wie sieht die Jordansche Normalform von A aus, wenn
   (a) die geometrische Vielfachheit von λ_1 gleich 1 ist,
   (b) die geometrische Vielfachheit von λ_2 gleich 2 ist?

2. Geben Sie für folgende Matrizen die Jordansche Normalform sowie die entsprechende Transformationsmatrix an:

   (a) $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, (b) $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, (c) $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

   (d) A_4, definiert in Aufgabe 7(e), 7. Übung.

   (Z1) Begleitmatrix C_Φ zum Polynom $\Phi(x) = (x+1)^2(x-2)^2$ (Aufg. (Z4), 7. Übung).

3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform folgender Matrizen:

   (a) **(HA)** $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (b) **(HA)** $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

   (c) **(HA)** $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, (d) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   (Z2) Geben Sie die entsprechende Jordanbasis an.

4. **(HA)** Es seien $\mathcal{P}_3$ der lineare Raum aller reellen Polynome höchstens dritten Grades und

   $$\mathcal{A} : \mathcal{P}_3 \longrightarrow \mathcal{P}_3\,, \quad p(t) \mapsto p(t) + p'(t)\,.$$

   (a) Geben Sie die Matrixdarstellung A von $\mathcal{A}$ in der Basis $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2, t^3\}$ an und untersuchen Sie, ob es eine orthogonale Basis in $\mathcal{P}_3$ gibt, so dass die Matrixdarstellung von $\mathcal{A}$ in dieser Basis Diagonalgestalt hat.
   (b) Welche Gestalt hat die Matrixdarstellung B von $\mathcal{A}$ in der Basis

   $$\mathcal{B}_2 = \{1, t-1, t^2+1, t^3\}\,?$$

   (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von B.
   (d) Geben Sie das Spektrum des Operators $\mathcal{A}$ an.
   (e) Sei $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ der Koordinatenvektor von $p(t)$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1$. Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $p(t)$ bzgl. $\mathcal{B}_2$. Berechnen Sie die Koordinatenvektoren von $p(t) + p'(t)$ in beiden Basen. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse.