

# Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

## 4. Übung

1. Zeigen Sie mit Hilfe einer Gruppentafel, dass die vierten Einheitswurzeln bzgl. der gewöhnlichen Multiplikation komplexer Zahlen eine kommutative Gruppe  $(E_4, \cdot)$  bilden. Dabei versteht man unter einer Gruppentafel ein quadratisches Schema, aus dem die Verknüpfungen von je zwei Elementen der Gruppe erkennbar sind, also z.B.

	$a_1$	$a_2$	$\cdots$
$a_1$	$a_1 a_1$	$a_1 a_2$	$\cdots$
$a_2$	$a_2 a_1$	$a_2 a_2$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

2. Geben Sie (bis auf Isomorphie) alle Gruppen an, die aus 2, 3 bzw. 4 Elementen bestehen.
3. Stellen Sie die Verknüpfungstabellen für  $(\mathbb{Z}/(4), +)$  und  $(\mathbb{Z}/(4), \cdot)$  auf, und erläutern Sie anhand dieser Tabellen, weshalb der Restklassenring  $(\mathbb{Z}/(4), +, \cdot)$  kein Körper ist.
4. (a) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle für die Permutationsgruppe  $(S_3, \circ)$  aller Permutationen aus drei Elementen auf.  
 (b) **(HA)** Ist diese Gruppe kommutativ?  
 (c) **(HA)** Geben Sie alle kommutativen Untergruppen der  $(S_3, \circ)$  an.
5. Es seien  $(A, \circ_1)$  und  $(B, \circ_2)$  Gruppen. Zeigen Sie, dass

- (a)  $G = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$  mit der Verknüpfung  $(a, b) \circ (\tilde{a}, \tilde{b}) := (a \circ_1 \tilde{a}, b \circ_2 \tilde{b})$  eine Gruppe ist,  
 (b) die Gruppe  $(A, \circ_1)$  isomorph zu der Untergruppe  $(\tilde{A}, \circ)$  von  $(G, \circ)$  mit

$$\tilde{A} = \{(a, e_B) : a \in A\} \subset G$$

ist, wobei  $e_B$  das Einselement in  $B$  bezeichnet.

6. (a) Es sei  $G$  eine Gruppe. Zeigen Sie, dass  $\varphi_g : G \rightarrow G, x \mapsto g^{-1} x g$  für jedes fest gewählte  $g \in G$  ein Automorphismus (**innerer Automorphismus** genannt) ist.  
 (b) **(HA)** Zeigen Sie, dass die inneren Automorphismen einer Gruppe  $G$  mit der Komposition  $(\varphi \diamond \psi)(x) = \psi(\varphi(x))$  eine Gruppe  $(G_{\text{aut}}, \diamond)$  bilden.
7. Es seien  $G$  eine Gruppe und  $\varphi : G \rightarrow G$  definiert durch  $\varphi(x) = x^2$ . Beweisen Sie, dass  $\varphi$  genau dann ein Homomorphismus ist, wenn  $G$  eine kommutative Gruppe ist.
8. Es sei  $(S_\Delta, \circ)$  die Bewegungsgruppe eines gleichseitigen Dreiecks.
- (a) Stellen Sie die Gruppentabelle auf.  
 (b) Geben Sie alle Untergruppen an.  
 (c) Geben Sie alle Normalteiler an.

9. **(HA)** Lösen Sie die Aufgabe 8 für die Bewegungsgruppe  $(S_{\square}, \circ)$  eines Quadrates.
10. Es seien die Gruppen  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}_+, \cdot)$  gegeben. Zeigen Sie, daß die Abbildung  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto |x|$  ein surjektiver Homomorphismus mit dem Kern  $\ker f = \{-1, +1\}$  ist.
11.  $\mathbb{P}$  sei die Menge aller Polynome der Gestalt  $f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$ , mit der binären Operation  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .
- Untersuchen Sie, ob  $(\mathbb{P}, +, \circ)$  ein Ring ist.
  - Welche Teilmenge  $\mathbb{P}_0$  von  $\mathbb{P}$  ist bzgl. der Verknüpfung “ $\circ$ ” eine Gruppe? Ist diese kommutativ?
  - Ist  $(\mathbb{P}_1, \circ)$  mit  $\mathbb{P}_1 = \{f \in \mathbb{P}_0 : f(1) = 1\}$  eine Untergruppe von  $(\mathbb{P}_0, \circ)$ ?
12. Sei  $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +)$  die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass die Menge  $(3)$  der durch 3 teilbaren ganzen Zahlen ein Normalteiler von  $\mathbb{Z}$  ist.
13. **(HA)** Sei  $S_{[0,1]} = (S_{[0,1]}, \circ)$  die Menge der bijektiven Abbildungen des Intervalls  $[0, 1]$  auf sich.
- Zeigen Sie, dass  $S_{[0,1]}$  eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe abelsch?
  - Zeigen Sie, dass die Teilmenge  $S_{[0,1]}^{\frac{1}{2}} \subset S_{[0,1]}$  derjenigen Abbildungen  $f \in S_{[0,1]}$ , für die  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$  gilt, eine Untergruppe von  $S_{[0,1]}$ , aber kein Normalteiler ist.