

Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

2. Übung

1. Beweisen Sie durch vollständige Induktion

(a) die Ungleichung $2^n > n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$,

(b) die Summenformel für $\sum_{k=1}^n k$ (**HA**) und für $\sum_{k=1}^n k^2$,

(c) (**HA**) die Formel für die n -te Ableitung (nach x) des Produktes zweier n -mal differenzierbarer Funktionen $u(x)$ und $v(x)$.

2. Beweisen Sie, dass $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 133 teilbar ist.

3. (**HA**) Schreiben Sie den Term $(x - y)^5$ nach der binomischen Formel als Summe von Potenzen von x und y !

4. (**HA**) Berechnen Sie den Koeffizienten vor a^{15} in $(1 + a)^{20}$.

5. Beweisen Sie mit Hilfe der binomischen Formel, dass

(a) (**HA**) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$,

(c) (**HA**) $(1 + \lambda)^n > \frac{n^2}{4} \lambda^2$, $\lambda > 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

gilt!

6. Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen:

(a) $(2 + 3i)(3 - 2i)$, (b) $(1 + i)^3$, (c) $(1 + 2i)^6$, (d) $\frac{1+i}{1-i}$, (e) (**HA**) $\frac{2i}{1+i}$,

(f) (**HA**) $\frac{4-3i}{4+3i}$ (g) $\frac{a+bi}{a-bi}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $(a, b) \neq (0, 0)$), (h) $\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}$,

(i) (**HA**) $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$, (j) (**HA**) $\frac{(1-i)^5 - 1}{(1+i)^5 + 1}$, (k) $(a+bi)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

8. Man stelle folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar:

(a) (**HA**) $\cos \varphi - i \sin \varphi$ ($\varphi \in \mathbb{R}$), (b) -1 , (c) $2 - 2i$, (d) (**HA**) $-a^2 i$ ($a \in \mathbb{R}$),

(e) $\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)$ ($\alpha \in [0, 2\pi)$), (f) $1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$, (g) (**HA**) $-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. Sei $z = x + iy$ bzw. $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ eine beliebige komplexe Zahl ($z \neq 0$). Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie Betrag und Argument folgender komplexer Zahlen:

(a) \bar{z} , (b) $\frac{1}{\bar{z}}$, (c) (**HA**) $\frac{1}{z}$, (d) z^2 , (e) (**HA**) iz , (f) $z\bar{z}$, (g) $\left| \frac{z}{\bar{z}} \right|$.

10. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene die Menge aller komplexen Zahlen mit der Eigenschaft

(a) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = c$, (b) $\left| \frac{1}{z} \right| \leq 3$, (c) $2 < |z| < 4$, (d) $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$,

(e) $|z - z_0| = |z - z_1|$, (f) **(HA)** $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 2\pi$ und $|\operatorname{Re} z| < 1$,

(Z1) $|z + 3| + |z - 3| \leq 10$, **(Z2)** $|z| < 1 + \operatorname{Re} z$.

11. **(HA)** Sei $z = \frac{1}{1 + i\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

12. Man berechne mit Hilfe der Formel von Moivre

(a) $(1 + i)^{10}$, (b) $(1 - i\sqrt{3})^6$, (c) **(HA)** $(-1 + i)^5$, (d) **(HA)** $(\sqrt{3} + i)^3$.

13. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \notin \left\{ \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ die Beziehung

$$\left(\frac{1 + i \tan \alpha}{1 - i \tan \alpha} \right)^n = \frac{1 + i \tan n\alpha}{1 - i \tan n\alpha}$$

gilt.

14. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen:

(a) $z^3 = -1$, (b) **(HA)** $z^5 = 1$, (c) **(HA)** $z^3 - i = 0$, (d) $z^4 + 1 = 0$,

(e) $z^3 + 2 = 2i$, (f) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$, (g) $z^2 = -3 - 4i$,

(h) **(HA)** $z^6 = 64$, (i) $z^4 - 2iz^2 + 2i = 1$, (j) **(HA)** $z^2 + 4iz = 5$,

(Z1) $z^2 + 4iz + 5 = 0$, **(Z2)** $iz^2 - 2z - i + 1 = 0$, **(Z3)** $|z| - z = 1 + 2i$,

15. Zeigen Sie, dass für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ die Beziehung

$$2(|z|^2 + |w|^2) = |z - w|^2 + |z + w|^2$$

gilt.

16. Zerlegen Sie folgende Polynome sowohl in komplexe Linearfaktoren als auch in reelle Linear- und (wenn nötig) quadratische Faktoren:

(a) $z^2 + 3 + 4i$, (b) $z^3 + 1$, (c) $z^4 - 16$.

17. Man berechne die Summe aller n Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.

18. **(HA)** Man stelle $\cos n\varphi$ und $\sin n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) durch Potenzen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ dar.

Hinweis: Man wende den binomischen Satz und die Formel von Moivre auf $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ an.