Lineare Algebra/Analytische Geometrie für Physiker

1. Übung

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{2,4,6,8,10,\ldots\}\,,\ M_2 = \{1,4,9,16,25,\ldots\}\ (\mathbf{HA}),$$

$$M_3 = \{2,4,8,16,32,\ldots\}\ (\mathbf{HA}),$$

$$M_4 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots\right\}, M_5 = \{-1,1\}\,,\ M_6 = [-1,1],$$

$$M_7 = \{2,3,5,7,11,13,17,\ldots\}\,,\ M_8 = \{-4,-2,2,4\}\ (\mathbf{HA})\,.$$

2. Geben Sie folgende Mengen (wenn möglich) durch Aufzählung ihrer Elemente an:

$$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g,\ g \in \mathbb{Z}\} \cap \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g,\ g \in \mathbb{Z}\}\ ,$$

$$M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g,\ g \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x = 3g,\ g \in \mathbb{Z}\}\ ,$$

$$M_3 = \left\{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\right\}\ ,\ M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}\ ,\ M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$M_7 = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\right\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$M_8 = \left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\right\}\ ,\ M_9 = \left\{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\right\}\ .$$

3. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen (Grundmenge sei stets die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen)
   (a) der Lösungsmenge der Gleichung $\sin\frac{x}{3} \cdot \sin\frac{x}{5} = 0$, der Lösungsmenge der Gleichung $\sin\frac{x}{3} = 0$ und der Lösungsmenge der Gleichung $\sin\frac{x}{5} = 0$,
   (b) **(HA)** der Lösungsmenge der Gleichung $2\sin^2 x = 1$ und der Lösungsmenge der Gleichung $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?

4. Bilden Sie für die Mengen $I = \{a\}$ und $M = \{\ell, m, n\}$ die Mengen $I \times M$, $M \times I$ und M^2 .

5. Es seien A, B, C beliebige Mengen. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Gleichungen:
   (a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
   (b) **(HA)** $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$,
   (c) **(HA)** $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
   (d) $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A\Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ die sog. symmetrische Differenz zweier Mengen A und B bezeichnet,
   (e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

6. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq t\}$. Bestimmen Sie
   (a) $\displaystyle\bigcup_{0<t\leq 1} M_t$, (b) $\displaystyle\bigcap_{0<t\leq 1} M_t$, (c) $\displaystyle\bigcap_{1\leq t\leq 2} M_t$,
   (d) **(HA)** $\displaystyle\bigcup_{0<t<1} M_t$, (e) **(HA)** $\displaystyle\bigcap_{0<t<1} M_t$.

7. Es seien I eine beliebige Indexmenge und $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ein Mengensystem mit $M_\alpha \subset E$ für beliebiges $\alpha \in I$. Zeigen Sie

   (a) $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha^c = \left(\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c$,

   (b) **(HA)** $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha^c = \left(\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^c$,

   wobei $M_\alpha^c := E \setminus M_\alpha$ die sog. Komplementärmenge von M_α bzgl. der Menge E bezeichnet.

8. Man gebe die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ und die Menge $N := M^2$ **(HA)** für $M = \{1,3,5\}$ an.

9. Das Symbol $\#M$ bezeichne die Anzahl der Elemente einer Menge M. Man beweise, daß für jede Menge M mit $\#M < \infty$ die Beziehung $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$ gilt.

10. Geben Sie alle Funktionen $f : I \longrightarrow M$ an für

    (a) $I = \{a_1, a_2\}$, $M = \{1,2\}$,
    (b) $I = \{1\}$, $M = \{\ell, m, n\}$,
    (c) $I = \{a, b\}$, $M = \{3\}$.

11. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \longrightarrow B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

    (a) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$,
    (b) **(HA)** $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $f(x) = e^x$,
    (c) $A = \mathbb{R}_+$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$,
    (d) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$,
    (e) **(HA)** $A = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2},\, k \in \mathbb{Z}\right\}$, $B = \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$,
    (f) **(HA)** $A = B = \mathbb{N}$, $f(n) = n^2$,
    (g) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Q}$, $f(n) = \dfrac{1}{n}$,
    (h) $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = |2x - 4|$.

12. Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Man zeige:

    (a) Aus $A \subset B \subset X$ folgt $f(A) \subset f(B)$.
    (b) Für beliebge $A, B \subset X$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
    (c) **(HA)** Es gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \forall\, A, B \in \mathcal{P}(X)$.
    (d) **(HA)** Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
    (e) Für beliebige $A, B \subset Y$ gilt $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

13. Es seien $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ zwei Abbildungen und

    $$h = g \circ f : X \longrightarrow Z\,, \quad x \mapsto g(f(x))$$

    ihre Komposition. Zeigen Sie, dass h surjektiv (injektiv, bijektiv) ist, wenn f und g surjektive (injektve, bijektiv) sind. (Ist h auch unter schwächeren Voraussetzungen an f und g bijektiv?)

14. Für welche reellen Zahlen a, b, c, d ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x, y) \mapsto (ax + b, cy + d)$$

surjektiv, injektiv, bijektiv?

15. Sei S_n die Menge aller Permutationen der Ordnung n. Man bestimme $\#S_n$.

16. Es seien

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechne $\sigma_1 \circ \sigma_2$ (**HA**), $\sigma_1 \circ \sigma_1$ (**HA**), $\sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ und σ_3^{-1}.

17. In der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ seien folgende Relationen R_1 bis R_6 erklärt:

$$R_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}\,, \quad R_2 = \{(4,4)\} \cup R_1\,, \quad R_3 = R_2 \cup \{(1,3)\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$R_4 = R_3 \cup \{(3,1)\}\,, \quad R_5 = R_4 \cup \{(1,2), (2,1), (3,2), (2,3)\}\ (\mathbf{HA})\,,$$

$$R_6 = R_2 \cup \{(2,3), (3,2), (1,2), (2,1)\}\,.$$

(a) Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen?
(b) Man ergänze die Relationen, die keine Äquivalenzrelationen sind, durch Hinzufügen möglichst weniger weiterer Elemente aus $M \times M$ zu einer Äquivalenzrelation.
(c) Man bestimme jeweils alle Äquivalenzklassen.

18. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv?

(a) $X = \mathbb{N}$, $m\,R_a\,n \Leftrightarrow_{\text{def}} m + n$ ist gerade,
(b) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $m\,R_b\,n \Leftrightarrow_{\text{def}} m + n$ ist ungerade,
(c) $X = \mathbb{N}$, $m\,R_c\,n \Leftrightarrow_{\text{def}} |m - n| \le 2$,
(d) $X = \mathbb{N}$, $m\,R_d\,n \Leftrightarrow_{\text{def}} \dfrac{m}{n}$ ist ganzzahlige Potenz von 2,
(e) $X = \mathbb{N}$, $m\,R_e\,n \Leftrightarrow_{\text{def}} m|n$,
(f) $X = \mathbb{R}$, $x\,R_f\,y \Leftrightarrow_{\text{def}} e^x = e^y$,
(g) **(HA)** $X = \mathbb{R}$, $x\,R_g\,y \Leftrightarrow_{\text{def}} x^2 = y^2$,
(h) $X = \mathbb{Z}$, $a\,R_h\,b \Leftrightarrow_{\text{def}} 4|(a - b)$,
(i) **(HA)** $X = \mathbb{N}$, $m\,R_i\,n \Leftrightarrow_{\text{def}} mn$ ist ungerade,
(j) $X = \mathbb{R}$, $x\,R_j\,y \Leftrightarrow_{\text{def}} x \le y$.

19. Zeigen Sie, dass die Relation $(a_1, b_1)R(a_2, b_2) \Leftrightarrow_{\text{def}} a_1 b_2 = a_2 b_1$ auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist und dabei jede Äquivalenzklasse mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden kann.

20. Es sei $P \subset \mathcal{P}(M)$ ein System paarweise disjunkter, nichtleerer Teilmengen von M mit

$$\bigcup_{A \in P} A = M\,,$$

d.h. P ist eine Partition von M. Die Relation $R \subset M \times M$ sei definiert durch

$$(x, y) \in R \ \Leftrightarrow_{\text{def}} \ \exists A \in P : x \in A \text{ und } y \in A\,.$$

Man zeige, dass R eine Äquivalenzrelation ist.