

Mathematik für Informatiker

Weihnachtsübung

1. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnummerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass jeder Gast sein eigenes Zimmer hat.)
 - (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
 - (b) 1100 Gäste reisen ab. Wie ist die Belegung des Hotels?
 - (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
 - (d) Derartige Hotels stehen auf allen Sternen. Aufgrund der Weihnachtsfeiertage im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstandenen Zimmerbedarf decken?
 - (e) Bei der Jahresendabrechnung wird der Hotelchef vom gastronomischen Zentrum gebeten, alle möglichen Zimmerbelegungen aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnummerierte Varianten auf. Das gastronomische Zentrum ist jedoch nicht zufrieden. Warum?

2. Sind folgende Mengen abzählbar?

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[n]{m} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N}\}$,
- (b) Menge der Primzahlen,
- (c) \mathbb{N}^2 ,
- (d) \mathbb{N}^3 .

3. Lösen Sie Zusatzaufgaben der 3. Übung!

4. Die Fibonacci Zahlen werden rekursiv wie folgt definiert:

$$F_1 = F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

Zeigen Sie:

- (a) $1 + \sum_{k=1}^{n-1} F_k = F_{n+1}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$,
- (b) $F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n, n, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$
- (c) $F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2, n \in \mathbb{N}$
- (d) F_n erlaubt die explizite Darstellung

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

5. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

gilt!