Mathematik für Informatiker

9. Übung – Orthogonalisierung, QR-Zerlegung, Eigenwerte, Eigenvektoren, Jordansche Normalform

---

1. Geben Sie in $\mathbb{R}^4$ (ausgerüstet mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt) eine orthonormale Basis an, die die Vektoren $\mathbf{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0,0]^T$, $\mathbf{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}[0,0,1,1]^T$ enthält.

2. Orthogonalisieren Sie mit dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren folgende Basen

   (a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (b) **HA:** $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{bmatrix}$

   (c) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

3. **HA:** Orthogonalisieren Sie folgende Vektoren des $\mathbb{R}^4$, und ergänzen Sie diese zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Geben Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ eine Zerlegung $A = QR$ an, wobei Q eine orthogonale Matrix ist und R eine obere Dreiecksmatrix.

5. **HA:** Sei $\ell = [14,-3,-6,-7]^T \in \mathbb{R}^4$ und $L_0 \subset \mathbb{R}^4$ der Unterraum, welcher von den Vektoren

$$[-3,0,7,6]^T, [1,4,3,2]^T, [2,2,-2,-2]^T$$

   aufgespannt wird. Man bestimme den Abstand $d(\ell, L_0) := \min_{u \in L_0} \|\ell - u\|_2)$ und das Element $\ell_0 \in L_0$ für das $d(\ell, L_0) = \|\ell - \ell_0\|_2$ gilt.

6. Bestimmen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{b} = [1,0,1]^T$ diejenige Lösung $\mathbf{x}$, für die $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ minimal wird.

7. Bestimmen Sie für folgende symmetrische (reelle) Matrizen A die Eigenwerte, deren Vielfachheit sowie ein dazugehöriges System von Eigenvektoren. Geben Sie eine orthogonale Matrix B so an, dass $B^T AB$ Diagonalgestalt hat.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **HA:** (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ **HA:** (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & 13 \end{bmatrix}$

HA: (e) $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ (f) Flip-Matrix $J_n = (\delta_{i,n-j+1})_{i,j=1}^n$

(g) $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n, a_{ij} = 1 \quad \forall i, j$ **HA:** (f) und (g) für $n = 4$

8. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte einer diagonalisierbaren $n \times n$ Matrix A. Zeigen Sie:
   (a) Ist $g(\mu)$ ein Polynom, dann sind $g(\lambda_1), \ldots, g(\lambda_n)$ die Eigenwerte von $g(A)$.
   (b) **HA:** Die Eigenwerte von $A + \alpha I$ (α const.) sind $\lambda_i + \alpha$ ($i = 1, \ldots, n$).

9. Sei $\phi(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_1 x - a_0$ ein Polynom n-ten Grades. Die $n \times n$ Matrix

   $$C_\phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ a_0 & \cdots & & a_{n-1} \end{bmatrix}$$ heißt *Begleitmatrix von* ϕ.

   (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und alle Eigenwerte von C_ϕ.

   (b) Seien alle Eigenwerte λ_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) von C_ϕ einfach. Zeigen Sie, dass dann C_ϕ folgende Diagonalisierung

   $$V^{-1} C_\phi V = \operatorname{diag}(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$$

   mit $V = [\lambda_j^i]_{i,j=0}^{n-1}$ gestattet.

   (c) Überprüfen Sie obige Aussagen für $\phi(x) = x^n - 1$. In diesem Fall heißt $F_n := \frac{1}{\sqrt{n}} V$ *Fouriermatrix der Ordnung* n.

10. Zeigen Sie, dass jede Matrix der Gestalt

    $C = \operatorname{circ}\ (c_0, \cdots, c_{n-1}) =$ (spezielle Toeplitz-matrix, genannt Zirkulante) $\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & \ddots & c_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_{n-1} & c_0 \end{bmatrix}$

    mit Hilfe der unitären Transformation F_n auf Diagonalgestalt gebracht werden kann. Wie sehen die Diagonalelemente aus?

11. Gegeben seien folgende reelle Matrizen der Ordnung 3 bzw. 4:

    $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \textbf{HA: } A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Berechnen Sie für diese Matrizen alle Eigenwerte λ_j, $j = 1, 2, \ldots$.
    (b) Untersuchen Sie, für welche Matrizen A_k ($k = 1, 2, 3, 4$) es eine Transformationsmatrix B gibt so, dass

    $$B^{-1} A_k B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$$

    gilt! Wenn dies möglich ist, geben Sie B an! In welchen Fällen kann B als orthogonale (unitäre) Matrix gewählt werdern?

12. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform folgender Matrizen:
   (a) A_1, A_2, A_3 aus Aufgabe 11,
   (b) **HA:** $A_4 = \lambda I_n + [\delta_{i,j-1}]_{i,j=1}^n$, wobei δ das Kroneckersymbol bezeichnet,
   (c) $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

13. **HA:** Zeigen Sie: Eine reelle, symmetrische, orthogonale Matrix hat nur die Eigenwerte $+1$ oder -1. Gilt dies auch ohne die Voraussetzung "symmetrisch"?

14. **HA:** Untersuchen Sie folgende Matrizen auf die Eigenschaften normal, symmetrisch, hermitesch, unitär:
$$A_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1+\mathbf{i}\sqrt{3} & -1-\mathbf{i}\sqrt{3} \\ 2 & -1-\mathbf{i}\sqrt{3} & -1+\mathbf{i}\sqrt{3} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 2 \\ 2 & \mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{i} & 0 \\ -\mathbf{i} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$
Geben Sie alle Eigenwerte von $A_i (i = 1, 2, 3)$ sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an. (Zeigen Sie, dass A_1 die Fouriermatrix F_3 ist.) Welche der Matrizen sind diagonalisierbar?

15. **HA:** Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
   (a) A ist invertierbar,
   (b) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A.

16. **HA:** Seien λ ein Eigenwert und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor der regulären Matrix A. Zeigen Sie, dass dann $\frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert und $\mathbf{x}$ ein zugehöriger Eigenvektor von A^{-1} sind.

17. **HA:** Sei $\varphi \in (0, \pi)$ und
$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass A eine orthogonale Matrix ist, deren Eigenwerte nicht reell sind.

18. Zwei Matrizen $A, B, \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine reguläre Matrix C gibt so, dass
$$B = C^{-1}AC\,.$$
Beweisen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleichen Eigenwerte haben (sogar die gleiche Jordannormalform). Welchen Zusammenhang gibt es bei den Eigenvektoren?

19. **HA:** Geben Sie 2 verschiedene Matrizen der Ordnung 3 an, (beide sollten nicht mehr als 4 Nullen enthalten)
   (a) die die Eigenwerte $1, 2, 3$ haben,
   (b) die den Eigenwert 2 mit der algebraischen Vielfachheit 3 haben, eine sollte diagonalisierbar sein, die andere nicht.

   (Vergessen Sie nicht, Ihre Wahl zu begründen!)

Zusatz: Erläutern Sie am Beispiel der Fouriermatrix F_4 (oder F_8) das Teile- und Herrsche-Prinzip zur Berechnung von $\quad F_n x \qquad (x \in \mathbb{C}^n)$.