Mathematik für Informatiker

8. Übung – Interpolation, Gleichungssysteme in $\mathbb{C}$, Determinanten, Invertierung von Matrizen

---

1. Sei $\mathcal{P}_n$ der lineare Raum aller (reellen) Polynome maximal n-ten Grades.

   (a) Gibt es ein Polynom $p(x) \in \mathcal{P}_2$, welches an den Stellen $x_i = i \quad (i = 1, 2, 4)$ gerade die gleichen Funktionswerte annimmt wie $f(x) = \frac{1}{x}$? Wenn ja, geben Sie die Koeffizienten dieses Polynoms an!

   (b) Gibt es ein lineares Polynom, das die Bedingungen aus a) erfüllt?

2. **HA:**

   (a) Gesucht ist ein Polynom $p(x) \in \mathcal{P}_4$, für das
   $$p(1) = p(-2) = -p(-1) = \frac{p(2)}{9} = -3p(0) = 3 \text{ gilt!}$$

   (b) Gibt es ein Polynom dritten Grades, welches diese Bedingungen erfüllt ?

   (c) Man bestimme gegebenenfalls alle Polynome fünften Grades, die diese Bedingungen erfüllen !

3. Gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{C}^n$ eines komplexen Gleichungssystems $Ax = b$. Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

4. **HA:** Lösen Sie folgendes (komplexes) Gleichungssystem
   $$\begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -(1+\mathbf{i}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-\mathbf{i} \\ 2+\mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

   (a) Mit dem Gauß Algorithmus!

   (b) Mit Hilfe von Aufgabe 3!

   (c) Mit der Cramerschen Regel!

5. Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichungssysteme aus Aufgaben der 7. Übung mit der Cramerschen Regel:

   (a) 3 b),

   (b) HA: 3 f) für $\lambda = -1$ und $\lambda = 0$,

   (c) HA: 2 a) für $\lambda = 2$

6. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix}$

7. Berechnen Sie die Determinante folgender $n \times n$ Matrizen

(a) $\begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & ⋰ & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\left[\lambda_i^j\right]_{i,j=0}^{n-1}$ (d) $\operatorname{tridiag}(1,-2,1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$

8. Lösen Sie die Matrizengleichung $AX = B$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1}, **HA:** B^{-1} von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ bzw. $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ mit Hilfe

   (a) des Gauß-Jordan-Verfahrens,

   (b) der Cramerschen Regel,

   (c) Bestimmen Sie die Lösungen x, **HA:** y der Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad By = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

10. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mittels inverser Matrix, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis:

(a) $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & 2z & = & -2 \end{array}$ **HA:** (b) $\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}.$

11. Seien $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dabei seien $C + 2I, B, B + I$ reguläre Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichungen nach A auf

HA: (a) $CA + 2A - B = C$,
HA: (b) $(AB + A)^T = B^T + I$,
(c) $A(B + I) = I + B^{-1}$.

12. Geben Sie die LR-Zerlegung folgender Matrix an

   (a) **HA:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) $A = \mathrm{tridiag}(1,-2,1) + e_1 e_1^T$. Bestimmen Sie daraus eine RL-Zerlegung von A^{-1}!

13. **HA:** Gegeben sei die folgende tridiagonale Matrix der Ordnung n:

$$A_n = \begin{bmatrix} \cos\rho & 1 & & & & \\ 1 & 2\cos\rho & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\rho & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 2\cos\rho \end{bmatrix}.$$

(a) Man zeige mit Hilfe des Entwicklungssatzes die Rekursionsformel

$$\det A_n = 2\cos\rho \cdot \det A_{n-1} - \det A_{n-2}\,, \ n > 2\,.$$

(b) Man zeige mittels vollständiger Induktion $\det A_n = \cos(n\rho)$.

14. **HA:** Klassifizieren Sie die Lage zweier Geraden des $\mathbb{R}^2$,

$$g_j\,:\, a_{j1}x + a_{j2}y = a_{j3}\,,\ a_{j1}^2 + a_{j2}^2 > 0\,,\ j = 1,2\,,$$

mit Hilfe der Ränge der Matrizen

$$A = [\,a_{jk}\,]_{j,k=1}^{2}\,,\ A' = [\,a_{jk}\,]_{j=1,k=1}^{2\ \ \ 3}\,.$$

Zusatz 1: Es seien n verschiedene reelle Zahlen $t_1, \cdots, t_n$ sowie n weitere reelle Zahlen $b_1, \cdots, b_n$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein Polynom $p \in \mathcal{P}_{n-1}$, so dass gilt

$$p(t_i) = b_i \quad \text{für} \quad i = 1, \cdots, n. \qquad (\mathcal{L})$$

(b) Bildet das Mengensystem $\left\{ l_j(x) := \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \dfrac{x - t_i}{t_j - t_i} \right\}_{j=1}^{n}$ eine Basis in $\mathcal{P}_{n-1}$?

(c) Zeigen Sie, dass das Polynom $p(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j l_j(x)$ die Interpolationsbedingungen $(\mathcal{L})$ erfüllt.

Zusatz 2: Sei A eine quadratische Matrix

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix};$$

E, F, G, H seien selbst Matrizen, wobei E eine Matrix der Ordnung m mit $\det E \neq 0$ ist.

Zeigen Sie, dass A genau dann regulär ist, wenn die Matrix der Ordnung n
$A \backslash E := H - GE^{-1}F$
regulär ist, und es gilt $\det A = \det E \cdot \det A \backslash E$.

($A \backslash E$ wird Schurkomplement von E in A genannt.)