

8. Übung – Interpolation, Gleichungssysteme in  $\mathbb{C}$ , Determinanten, Invertierung von Matrizen

---

1. Sei  $\mathcal{P}_n$  der lineare Raum aller (reellen) Polynome maximal  $n$ -ten Grades.
  - (a) Gibt es ein Polynom  $p(x) \in \mathcal{P}_2$ , welches an den Stellen  $x_i = i$  ( $i = 1, 2, 4$ ) gerade die gleichen Funktionswerte annimmt wie  $f(x) = \frac{1}{x}$ ? Wenn ja, geben Sie die Koeffizienten dieses Polynoms an!
  - (b) Gibt es ein lineares Polynom, das die Bedingungen aus a) erfüllt?

2. **HA:**

- (a) Gesucht ist ein Polynom  $p(x) \in \mathcal{P}_4$ , für das

$$p(1) = p(-2) = -p(-1) = \frac{p(2)}{9} = -3p(0) = 3 \text{ gilt!}$$

- (b) Gibt es ein Polynom dritten Grades, welches diese Bedingungen erfüllt ?
- (c) Man bestimme gegebenenfalls alle Polynome fünften Grades, die diese Bedingungen erfüllen !

3. Gesucht sei die Lösung  $x \in \mathbb{C}^n$  eines komplexen Gleichungssystems  $Ax = b$ . Wie kann man diese durch Übergang zu einem äquivalenten reellen Gleichungssystem finden?

4. **HA:** Lösen Sie folgendes (komplexes) Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 + \mathbf{i} & \mathbf{i} \\ -(1 + \mathbf{i}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - \mathbf{i} \\ 2 + \mathbf{i} \end{bmatrix}.$$

- (a) Mit dem Gauß Algorithmus!
- (b) Mit Hilfe von Aufgabe 3!
- (c) Mit der Cramerschen Regel!

5. Berechnen Sie die Lösung folgender Gleichungssysteme aus Aufgaben der 7. Übung mit der Cramerschen Regel:

- (a) 3 b),
- (b) HA: 3 f) für  $\lambda = -1$  und  $\lambda = 0$ ,
- (c) HA: 2 a) für  $\lambda = 2$

6. Berechnen Sie die Determinante folgender Matrizen

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & 2 & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & n \end{bmatrix}$$

7. Berechnen Sie die Determinante folgender  $n \times n$  Matrizen

$$(a) \begin{bmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & \cdots & x \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$(c) \left[ \lambda_i^j \right]_{i,j=0}^{n-1} \quad (d) \text{tridiag}(1, -2, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

8. Lösen Sie die Matrixgleichung  $AX = B$  mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Berechnen Sie die inverse Matrix  $A^{-1}$ , **HA:**  $B^{-1}$  von  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$  bzw.  $B =$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 6 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe

- (a) des Gauß-Jordan-Verfahrens,
- (b) der Cramerschen Regel,
- (c) Bestimmen Sie die Lösungen  $x$ , **HA:**  $y$  der Gleichungssysteme

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad By = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

10. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mittels inverser Matrix, und überprüfen Sie Ihr Ergebnis:

$$(a) \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = -2 \end{cases} \quad \text{HA: } (b) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}.$$

11. Seien  $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Dabei seien  $C + 2I, B, B + I$  reguläre Matrizen. Lösen Sie folgende Gleichungen nach  $A$  auf

- HA:** (a)  $CA + 2A - B = C$ ,
- HA:** (b)  $(AB + A)^T = B^T + I$ ,
- (c)  $A(B + I) = I + B^{-1}$ .

12. Geben Sie die  $LR$ -Zerlegung folgender Matrix an

(a) **HA:**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

