Mathematik für Informatiker

6. Übung – Vektorräume, Lineare Abbildungen

---

1. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt der Ebenen

$$E_1 : x + y + 2z = 2 \qquad E_2 : y - z = 1$$

ein affiner Teilraum U des $\mathbb{R}^3$ ist. Bestimmen Sie dessen Dimension.

2. **HA:** Bestimmen Sie den affinen Teilraum U des $\mathbb{R}^3$, der die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

enthält.

3. Sei $(\mathcal{P}_n, +, \mathbb{R})$ der (lineare) Vektorraum aller reellen Polynome vom Grade $\leq n$.
   (a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}_n, +, \mathbb{R})$ isomorph zum Vektorraum $(\mathbb{R}^{n+1}, +, \mathbb{R})$ ist.
   (b) Welche Dimension hat $(\mathcal{P}_n, +, \mathbb{R})$? Geben Sie eine Basis an!
   (c) Geben Sie die Dimension des Unterraumes von $\mathcal{P}_n$ an, der von den Polynomen $p_1(t) = t^3 - t^2 + t, \quad p_2(t) = t^2 - t, \quad p_3(t) = 2t^3 - 1$ aufgespannt wird !
   (d) **HA:** Untersuchen Sie, ob folgende Polynome

   $$p_i(t) = t^i - t^{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots n$$

   linear unabhängig sind und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathcal{P}_n$!
   (e) Bilden folgende Mengen U_j $(1 \leq j \leq 6)$ Unterräume?

   $U_1 = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = 0\}$,
   HA: $U_2 = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = 1\}$,
   $U_3 = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) = 0 \text{ und } p(1) = 0\}$,
   $U_4 = \{p \in \mathcal{P}_n : p(t) = p(-t)\}$,
   HA: $U_5 = \mathcal{P}_{n-1}$,
   HA: $U_6 = \{p \in \mathcal{P}_n : p(0) + p(1) = 0\}$.

   Wenn ja, geben Sie die Dimension sowie eine Basis an!
   (f) Finden Sie zu U_1 bzw. U_4 einen Komplementärraum V_1 bzw. V_4.
   (g) Geben Sie für ein beliebiges Polynom $p \in \mathcal{P}_n$ Polynome $p_1 \in U_4$ und $p_2 \in V_4$ an für die gilt $p = p_1 + p_2$. Sind p_1, p_2 eindeutig bestimmt?
   (h) **HA:** Sind die Unterräume U_1 und U_3 zueinander isomorph?

4. **HA:** Beweisen Sie, dass bei einem Isomorphismus linearer Räume linear unabhängige Elemente wieder auf linear unabhängige Elemente abgebildet werden.

5. **HA:** Sei S eine beliebige Menge von Vektoren des $\mathbb{R}^n$, die k linear unabhängige Elemente $u_1, u_2, \ldots, u_k$ enthält.

(a) Zeigen Sie, dass $k \leq n$ gilt!

(b) Beweisen Sie, dass die linearen Hüllen $\mathcal{L}(S)$ und $\mathcal{L}(\{u_j\}_{j=1}^k)$ gleich sind.

(c) Bestimmen Sie die linearen Hüllen folgender Mengen S_1, S_2 des $\mathbb{R}^3$

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1 \right\}.$$

Geben Sie die Dimension und eine Basis dieser linearen Hüllen an.

6. Zeigen Sie, dass folgende Teilmengen U, V des $\mathbb{R}^2$ lineare Teilräume des $\mathbb{R}^2$ sind. Geben Sie eine Basis an, und ergänzen Sie diese zu einer Basis des $\mathbb{R}^2$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x \right\}, \quad V = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ die direkte Summe von U und V ist, $\mathbb{R}^2 = U \oplus V$.

7. **HA:** Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

Z: $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha^2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

8. Es sei $\{a_1, a_2, a_3\}$ Basis eines linearen Vektorraumes V. Bilden dann die Vektoren

$$b_1 = a_1 + a_2, \; b_2 = a_1 + a_3, \; b_3 = a_2 + a_3$$

auch eine Basis von V?

9. Beweisen Sie, dass $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ ist und dass $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von W ist. Gilt $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in W$?
Finden Sie alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die die Basis $\mathcal{B}_1$ zu einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$ ergänzen.
Geben Sie die Basisdarstellung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der Basis $\mathcal{B}_1 \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ an!

10. Man untersuche, ob folgende Abbildungen linear sind:

   (a) $A_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; A_1 x = x + a \quad (a \in \mathbb{R}^3 \text{ const.})$

   (b) **HA:** $A_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2; A_2 x = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

   (c) $A_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$

   (d) $A_4 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}; (A_4 p)(t) = tp(t)$

   (e) **HA:** $A_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^4; A_5 z = \begin{pmatrix} \mathbf{i}z \\ 2\mathbf{i}^2 z \\ 3\mathbf{i}^3 z \\ 4\mathbf{i}^4 z \end{pmatrix}$

   (f) **HA:** $A_6 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; A_6 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 + x_2^2$

   (g) **HA:** $A_7 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n; (A_7 p)(t) = p(2t + 4)$

   (h) $A_8 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{2n}; (A_8 p)(t) = p(t^2)$

   (i) $A_9 : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3; A_9 z = \alpha z \quad (\alpha \in \mathbb{R} \text{ const.})$

11. Man bestimme den Kern $\ker A_j$ und das Bild $\operatorname{im} A_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ für folgende lineare Operatoren:

   (a) $A_1 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2; A_1 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   (b) $A_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2; A_2 \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}$

   (c) **HA:** $A_3 : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n; A_3 p = p'$ (p' Ableitung von p)

   (d) **HA:** $A_4 : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}; A_4 p = p(a)$ $(a \in \mathbb{R} \text{ const.})$