

Mathematik für Informatiker

5. Übung – Gruppen, Ringe, Körper

1. Zeigen Sie, dass die 4-ten Einheitswurzeln (d.h. die komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$) eine abelsche Gruppe Z_4 bezüglich der Multiplikation in \mathbb{C} bilden!
 - (a) Bestimmen Sie die Ordnung der Elemente!
 - (b) Geben Sie das Einselement und zueinander inverse Elemente an!
 - (c) Ist Z_4 zyklisch, d.h. wird diese Gruppe von einem Element erzeugt? Wenn ja, geben Sie ein solches Element an!
 - (d) Geben Sie alle Untergruppen der Z_4 an!

(Hinweis: Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf.)

2. Geben Sie durch Selbstversuch die Verknüpfungstafel für die Sockengruppe V_4 an, deren Elemente a, b, c, d durch folgende Handlungen definiert sind. (Ausgangssituation ist ein mit einer Socke bekleideter Fuß, der andere ist nackt!)
 - a: Sie machen nichts!
 - b: Sie ziehen die Socke aus und über den anderen Fuß!
 - c: Sie ziehen die Socke aus, wenden sie und ziehen sie über den gleichen Fuß!
 - d: Sie ziehen die Socke aus, wenden sie und ziehen sie über den anderen Fuß!

Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung dieser Handlungen!

Welche Ordnung haben die Elemente a, b, c, d ?

Ist V_4 isomorph zur Gruppe Z_4 aus Aufgabe 1?

3. **HA:** Betrachten Sie die Menge F folgender 4 Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = -x, f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

Als Verknüpfung sei die Hintereinanderausführung „ \circ “ gewählt:

$$(f_i \circ f_j)(x) = f_i(f_j(x)) \quad (i, j \in \{1, 2, 3, 4\}).$$

Zeigen Sie, dass $\langle F, \circ \rangle$ eine Gruppe ist, die zur Gruppe V_4 aus Aufgabe 2 isomorph ist!

4. Eine Restklasse \bar{p} heißt **prime Restklasse** modulo m , wenn p und m teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_{pr m}$ der primen Restklassen modulo m bzgl. der Multiplikation für $m = 8$ und $m = 5$ eine Gruppe bilden!

(Z1) Geben Sie isomorphe Strukturen an!

(Z2) Gilt, dass $\langle \mathbb{Z}_{pr m}, \cdot \rangle$ für beliebiges m eine Gruppe bildet?

(Z3) Gilt, dass $\langle \mathbb{Z}_{pr m}, +, \cdot \rangle$ einen Ring bildet?

5. Zeigen Sie anhand der Verknüpfungstafel, dass die Menge S_3 aller Permutationen aus 3 Elementen (d.h. aller Bijektionen von $\{1, 2, 3\}$ auf $\{1, 2, 3\}$) eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung bildet. Ist dies eine abelsche Gruppe? Geben Sie alle Untergruppen an!

Verwenden Sie für die Elemente der S_3 folgende Bezeichnungen:

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. **HA:** Zeigen Sie, dass die Bewegungsgruppe B_Δ eines gleichseitigen Dreiecks (bestehend aus allen Drehungen und Spiegelungen, die das Dreieck in sich selbst überführen) eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung bildet, die zur S_3 isomorph ist.

7. (a) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Z}[\mathbf{i}] := \{z \in \mathbb{C} : z = a + \mathbf{i}b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}\}$$

einen Unterring von $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ bildet!

- (b) Ist $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein Integritätsbereich?

- (c) **HA:** Ist $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$ ein Körper?

(Z) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}[\mathbf{i}]$.

8. (a) Zeigen Sie, dass der Restklassenring $\langle \mathbb{Z}_6, +, \cdot \rangle$ nicht nullteilerfrei ist!

- (b) **HA:** Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $\langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\}, \cdot \rangle$ auf! Liegen abelsche Gruppen vor?

Begründen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot \rangle$ einen Körper bildet!

9. **HA:** Bilden die Mengen M_1 bzw. M_2 der 2. Übung, Aufgabe 2, Unterringe von $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$?

10. **HA:** Sei $\langle \mathbb{R}, \star \rangle$ die Menge der reellen Zahlen mit der Verknüpfung

$$x \star y := x + y + x^2 y.$$

- (a) Ist $\langle \mathbb{R}, \star \rangle$ ein Gruppoid? Geben Sie das Einselement an!

- (b) Ist $\langle \mathbb{R}, \star \rangle$ ein Monoid?

- (c) Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein rechtsinverses Element $y \in \mathbb{R}$ gibt, d.h. $\exists! y \in \mathbb{R} : x \star y = e$.

(Z) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein Linksinverses, (d.h. $\exists! y \in \mathbb{R} : y \star x = e$)?

11. Untersuchen Sie, ob die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die jeder komplexen Zahl z ihre konjugierte komplexe Zahl \bar{z} zuordnet ein Körperhomomorphismus ist. Ist dies sogar ein Isomorphismus?

12. **HA:**

- (a) Untersuchen Sie, ob die Menge der positiven reellen Zahlen \mathbb{R}_+ eine abelsche Gruppe bzgl. der Multiplikation bildet!

- (b) Ist durch die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = |x|$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{R}_+, \cdot \rangle$ definiert?

- (c) Ist dies sogar ein Isomorphismus?