Mathematik für Informatiker

5. Übung – Gruppen, Ringe, Körper

---

1. Zeigen Sie, dass die 4-ten Einheitswurzeln (d.h. die komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$) eine abelsche Gruppe Z_4 bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{C}$ bilden!

   (a) Bestimmen Sie die Ordnung der Elemente!

   (b) Geben Sie das Einselement und zueinander inverse Elemente an!

   (c) Ist Z_4 zyklisch, d.h. wird diese Gruppe von einem Element erzeugt? Wenn ja, geben Sie ein solches Element an!

   (d) Geben Sie alle Untergruppen der Z_4 an!

   (Hinweis: Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf.)

2. Geben Sie durch Selbstversuch die Verknüpfungstafel für die Sockengruppe V_4 an, deren Elemente a, b, c, d durch folgende Handlungen definiert sind. (Ausgangssituation ist ein mit einer Socke bekleideter Fuß, der andere ist nackt!)

   a: Sie machen nichts!

   b: Sie ziehen die Socke aus und über den anderen Fuß!

   c: Sie ziehen die Socke aus, wenden sie und ziehen sie über den gleichen Fuß!

   d: Sie ziehen die Socke aus, wenden sie und ziehen sie über den anderen Fuß!

   Die Verknüpfung ist die Hintereinanderausführung dieser Handlungen!
   Welche Ordnung haben die Elemente a, b, c, d?
   Ist V_4 isomorph zur Gruppe Z_4 aus Aufgabe 1?

3. **HA:** Betrachten Sie die Menge F folgender 4 Funktionen $f_i : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$f_1(x) = x\,,\ f_2(x) = \frac{1}{x}\,,\ f_3(x) = -x\,,\ f_4(x) = -\frac{1}{x}\,.$$

   Als Verknüpfung sei die Hintereinanderausführung „$\circ$“ gewählt:

$$(f_i \circ f_j)(x) = f_i(f_j(x)) \quad (i, j \in \{1, 2, 3, 4\})\,.$$

   Zeigen Sie, dass $\langle F, \circ \rangle$ eine Gruppe ist, die zur Gruppe V_4 aus Aufgabe 2 isomorph ist!

4. Eine Restklasse $\overline{p}$ heißt **prime Restklasse** modulo m, wenn p und m teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{Z}_{pr\,m}$ der primen Restklassen modulo m bzgl. der Multiplikation für $m = 8$ und $m = 5$ eine Gruppe bilden!

   (Z1) Geben Sie isomorphe Strukturen an!

   (Z2) Gilt, dass $\langle \mathbb{Z}_{pr\,m}, \cdot \rangle$ für beliebiges m eine Gruppe bildet?

   (Z3) Gilt, dass $\langle \mathbb{Z}_{pr\,m}, +, \cdot \rangle$ einen Ring bildet?

5. Zeigen Sie anhand der Verknüpfungstafel, dass die Menge S_3 aller Permutationen aus 3 Elementen (d.h. aller Bijektionen von $\{1,2,3\}$ auf $\{1,2,3\}$) eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderaufführung bildet. Ist dies eine abelsche Gruppe? Geben Sie alle Untergruppen an!
   Verwenden Sie für die Elemente der S_3 folgende Bezeichnungen:
$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$s_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, s_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, s_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. **HA:** Zeigen Sie, dass die Bewegungsgrupe $B_\triangle$ eines gleichseitigen Dreiecks (bestehend aus allen Drehungen und Spiegelungen, die das Dreieck in sich selbst überführen) eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung bildet, die zur S_3 isomorph ist.

7. (a) Zeigen Sie, dass die Menge
$$\mathbb{Z}[\,\mathbf{i}\,] := \{z \in \mathbb{C} : z = a + \mathbf{i}b \text{ mit } a, b \in \mathbb{Z}\}$$
   einen Unterring von $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ bildet!
   (b) Ist $\mathbb{Z}[\,\mathbf{i}\,]$ ein Integritätsbereich?
   (c) **HA:** Ist $\mathbb{Z}[\,\mathbf{i}\,]$ ein Körper?
   (Z) Bestimmen Sie alle invertierbaren Elemente in $\mathbb{Z}[\,\mathbf{i}\,]$.

8. (a) Zeigen Sie, dass der Restklassenring $\langle \mathbb{Z}_6, +, \cdot \rangle$ nicht nullteilerfrei ist!
   (b) **HA:** Stellen Sie die Verknüpfungstafeln für $\langle \mathbb{Z}_5, + \rangle$ und $\langle \mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\}, \cdot \rangle$ auf! Liegen abelsche Gruppen vor?
   Begründen Sie, dass $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot \rangle$ einen Körper bildet!

9. **HA:** Bilden die Mengen M_1 bzw. M_2 der 2. Übung, Aufgabe 2, Unterringe von $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$?

10. **HA:** Sei $\langle \mathbb{R}, \star \rangle$ die Menge der reellen Zahlen mit der Verknüpfung
$$x \star y := x + y + x^2 y\,.$$
   (a) Ist $\langle \mathbb{R}, \star \rangle$ ein Gruppoid? Geben Sie das Einselement an!
   (b) Ist $\langle \mathbb{R}, \star \rangle$ ein Monoid?
   (c) Zeigen Sie, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ genau ein rechtsinverses Element $y \in \mathbb{R}$ gibt, d.h. $\exists!\, y \in \mathbb{R} :\ x \star y = e$.
   (Z) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein Linksinverses, (d.h. $\exists!\, y \in \mathbb{R} :\ y \star x = e$)?

11. Untersuchen Sie, ob die Abbildung $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die jeder komplexen Zahl z ihre konjugierte komplexe Zahl $\overline{z}$ zuordnet ein Körperhomomorphismus ist. Ist dies sogar ein Isomorphismus?

12. **HA:**
   (a) Untersuchen Sie, ob die Menge der positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_+$ eine abelsche Gruppe bzgl. der Multiplikation bildet!
   (b) Ist durch die Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = |x|$ ein Gruppenhomomorphismus zwischen $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot \rangle$ und $\langle \mathbb{R}_+, \cdot \rangle$ definiert?
   (c) Ist dies sogar ein Isomorphismus?