Mathematik für Informatiker

4. Übung – Zahlbereiche

---

1. Seien x, y reelle Zahlen. Zeigen Sie

   a) $| x |=| -x |$ **HA:** b) $\pm x \leq | x |$ c) $| xy |=| x || y |$

   d) Sei $a \geq 0$ fixiert. Dann gilt $| x | \leq a$ genau dann, wenn $-a \leq x \leq a$.

   e) $\| x | - | y \| \leq | x + y |$ **HA:** f) $\| y - x | - | z - y \| \leq | x - z |$.

2. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen folgende Ungleichungen

   a) $| x - 2 | \geq 10$ b) $| x + 2 | - | x | > 1$

   c) $| x - 1 || x - 2 |= 2$ **HA:** d) $| x | + | x + 1 | + | x - 1 |= 3$.

3. Veranschaulichen Sie in der xy–Ebene die Lösungsmenge folgender Ungleichungen

   a) $|x| + |y| \leq 1$ b) $|x + y| \leq 1$ **HA:** c) $1 \leq |x - y| \leq 2$.

4. (a) Gilt die Dreiecksungleichung auch für komplexe Zahlen?

   (b) Entscheiden Sie, welche der Beziehungen aus Aufgabe 1 auch für Beträge komplexer Zahlen gelten!

5. Man berechne Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen.

   a) $(2 + 3\mathbf{i})(3 - 2\mathbf{i})$ b) $(1 + \mathbf{i})^3$

   HA: c) $(1 + 2\mathbf{i})^6$ d) $\dfrac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$

   HA: e) $\dfrac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$ **HA:** f) $\dfrac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}$

   g) $\dfrac{a + b\mathbf{i}}{a - b\mathbf{i}}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ (a, b) \neq (0, 0))$

   h) $\dfrac{(1 + \mathbf{i})^{10}}{(1 - \mathbf{i})^8}$ i) $\dfrac{1}{1 + \mathbf{i}\sqrt{3}}$

   HA: j) $\dfrac{(1 - \mathbf{i})^5 - 1}{(1 + \mathbf{i})^5 + 1}$ k) $\mathbf{i}^k (k \in \mathbb{Z})$

6. Stellen Sie folgende komplexe Zahlen in trigonometrischer Form dar

   $z_1 = \cos\varphi - \mathbf{i}\sin\varphi$, $z_2 = \dfrac{\cos\varphi + \mathbf{i}\sin\varphi}{z_1}$,

   $z_3 = (1 + \mathbf{i})^3$, **HA:** $z_4 = -1$,

   $z_5 = 2 - 2\mathbf{i}$, **HA:** $z_6 = -\frac{1}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

   (**Zusatz:** $z = \sin\alpha + \mathbf{i}(1 - \cos\alpha)$).

7. Skizzieren Sie in der Gaußschen Zahlenebene alle komplexen Zahlen mit der Eigenschaft

	a) $\mid z - 4\mathbf{i} \mid \geq 2$		b) $\mid \frac{1}{z} \mid \leq 3$
HA:	c) $2 < \mid z \mid < 4$	**HA:**	d) $\arg z \leq \frac{\pi}{4}$
	e) $\mid z+3 \mid + \mid z-3 \mid \leq 10$		f) $\operatorname{Re} z^2 = a \, (a \in \mathbb{R})$

8. Sei $z = \dfrac{1}{1+\mathbf{i}\sqrt{3}}$. Für welche natürlichen Zahlen n ist z^n reell?

9. Man berechne

   a) $(1+\mathbf{i})^{10}$ b) $(1-\mathbf{i}\sqrt{3})^6$ **HA:** c) $(\sqrt{3}+\mathbf{i})^3$ d) $(1+\mathbf{i}a)^n \; (a \in \mathbb{R})$.

10. Man bestimme alle Lösungen folgender Gleichungen

	a) $z^3 = -1$
HA:	b) $z^5 = 1$
	c) $z^3 - \mathbf{i} = 0$
HA:	d) $z^3 + 2 = 2\mathbf{i}$
	e) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}$
	f) $z^6 = 64$
	g) $z^4 - 2\mathbf{i}z^2 + 2\mathbf{i} = 1$
HA:	h) $\mathbf{i}z^2 - 2z - \mathbf{i} + 1 = 0$

11. Es sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, und es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $p(z)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\overline{z}_0$ eine Nullstelle von $p(z)$ ist.

12. Zeigen Sie, dass $\left(\dfrac{1+\mathbf{i}\tan\alpha}{1-\mathbf{i}\tan\alpha}\right)^n = \dfrac{1+\mathbf{i}\tan n\alpha}{1-\mathbf{i}\tan n\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

13. **HA:** Stellen Sie das Polynom $p(z) = z^4 + 1$ als Produkt zweier quadratischer Polynome mit reellen Koeffizienten dar sowie als Produkt von Linearfaktoren!

14. (a) Man berechne die Summe aller n (komplexen) Lösungen der Gleichung $z^n = 1$.
    (b) Man zeige, dass diese Lösungen eine (endliche) Gruppe (bzgl. der Multiplikation) bilden.

Zusatz: Lösen Sie die Gleichung $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Geben Sie die Lösung sowohl mittels trigonometrischer Funktionen als auch mit Hilfe von Wurzelausdrücken an. Ermitteln Sie hieraus explizite Formeln für $\sin\frac{2\pi}{5}$ und $\cos\frac{2\pi}{5}$.