Mathematik für Informatiker

3. Übung – Funktionen, Relationen, vollständige Induktion

---

1. Geben Sie alle Funktionen $f : I \to M$ an:

   a) $I = \{a_1, a_2\}, \quad M = \{1, 2\}$ b) $I = \{a\},\ M = \{l, m, n\}$
   c) $I = \{a, b\}, \quad M = \{3\}$

   und entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv, bijektiv sind!

2. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : A \to B$ injektiv, surjektiv, bijektiv sind:

	a)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = e^x$
	b)	$A = \mathbb{R},\ B = \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$,	$f(x) = e^x$
	c)	$A = \mathbb{R}^+,\ B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \sqrt{x}$
	d)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \sin x$
HA:	e)	$A = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\},\ B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \tan x$
	f)	$A = B = \mathbb{N}$,	$f(n) = n^2$
HA:	g)	$A = \mathbb{N},\ B = \mathbb{Q}$,	$f(n) = \frac{1}{n}$
	h)	$A = B = \mathbb{R}$,	$f(x) = \lvert 2x - 4 \rvert$

   Geben Sie gegebenenfalls Einschränkungen A',B' von A, B an so, daß $f : A' \to B'$ bijektiv wird. Bestimmen Sie die inverse Funktion $f^{-1} : B' \to A'$.

3. Seien $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ zwei Funktionen und $h = g \circ f : X \to Z,\ h(x) := g(f(x))$, ihre Komposition. Zeigen Sie: Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch h bijektiv. (Gilt h bijektiv auch unter schwächeren Voraussetzungen an f und g?)

4. Geben Sie eine Relation auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4\}$ an, die nicht reflexiv, aber symmetrisch und transitiv ist.

5. Welche der folgenden Relationen auf der Menge X sind reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

	a) $X = \mathbb{N}$,	mR_an,	wenn $m + n$ gerade
HA:	b) $X = \mathbb{N}$,	mR_bn,	wenn $m + n$ ungerade
	c) $X = \mathbb{N}$,	mR_cn,	wenn $\lvert m - n \rvert \leq 2$
	d) $X = \mathbb{N}$,	mR_dn,	wenn $\frac{m}{n}$ ganzzahlige Potenz von 2
	e) $X = \mathbb{N}$,	mR_en,	wenn $m \mid n$
	f) $X = \mathbb{R}$,	xR_fy,	wenn $e^x = e^y$
	g) $X = \mathbb{R}$,	xR_gy,	wenn $x^2 = y^2$
	h) $X = \mathbb{Z}$,	aR_hb,	wenn $4 \mid (a - b)$
HA:	i) $X = \mathbb{N}$,	mR_in,	wenn mn ungerade
	j) $X = \mathbb{R}$,	xR_jy,	wenn $x \leq y$

   k) $X =$ Menge der Menschen, $\overset{\frown}{\bigcirc}\ R_k\ \overset{\smile}{\bigcirc}$, wenn $\overset{\frown}{\bigcirc}$ liebt $\overset{\smile}{\bigcirc}$

6. Welche der Relationen aus Aufgabe 5 sind Ordnungsrelationen und welche Äquivalenzrelationen? (Geben Sie die entsprechende Klasseneinteilung an!).

7. Zeigen Sie, daß folgende Relation auf $\mathbb{N}^2$ eine Äquivalenzrelation ist:

$$(a_1, b_1)R(a_2, b_2) :\Leftrightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2.$$

   Jede Äquivalenzklasse kann dabei mit einer positiven rationalen Zahl identifiziert werden.

8. Beweisen Sie durch vollständige Induktion
   a) die Bernoullische Ungleichung: $(1+x)^n > 1 + nx$ für $x > -1, x \neq 0, n > 1$.
   b) den binomischen Satz: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.
   HA: c) die Summenformel für $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)$,
   HA: d) die Formel für die n-te Ableitung (nach x) des Produktes zweier n mal differenzierbaren Funktionen $u(x)$ und $v(x)$.

Zusatz: Gibt es eine Bijektion zwischen folgenden Mengen:

a) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$,

b) $[a, b], [c, d] \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$,

c) $(-\infty, \infty), (0, 1)$,

d) $[0, 1), (0, 1]$,

e) $(0, 1), (0, 1]$,

f) $[0, 1) \times [0, 1), [0, 1)$,

g) M beliebige Menge, $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge.

Wenn ja, geben Sie eine Bijektion an!