Mathematik für Informatiker

2. Übung – Mengen

---

1. Geben Sie folgende Mengen mit Hilfe ihrer Grundmenge und der Eigenschaft ihrer Elemente an

$M_1 = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$,		$M_2 = \{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$,
$M_3 = \{2, 4, 8, 16, 32, \cdots\}$,		$M_4 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \cdots\}$,
$M_5 = \{-1, 1\}$,		$M_6 = [-1, 1]$,
$M_7 = (a, b)$,	**HA:**	$M_8 = (c, d]$,
$M_9 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \cdots\}$,		$M_{10} = \{-4, -2, +2, 4\}$

2. Geben Sie folgende Mengen (wenn möglich) durch Aufzählung ihrer Elemente an

	$M_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1$	und		$x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}$,
	$M_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x = 2g_1$	oder		$x = 3g_2; g_1, g_2 \in \mathbb{Z}\}$,
	$M_3 = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)^3 = x^3 + 1\}$,			
	$M_4 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = \cos x\}$,			$M_5 = \{x \in \mathbb{R} : e^x = 0\}$,
HA:	$M_6 = \{x \in \mathbb{R} : \sin x = -\cos x\}$,		**HA:**	$M_7 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 + 2x = (x+1)^2\}$,
	$M_8 = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 1} = x - 1\}$,			$M_9 = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3\}$.

3. Geben Sie alle Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3\}$ an !

4. Wieviel verschiedene Teilmengen hat eine endliche Menge M?

5. Welche Beziehungen (Inklusionen) bestehen zwischen

(a)	der Lösungsmenge der Gleichung	$\sin \frac{x}{3} \cdot \sin \frac{x}{5} = 0$,	
	der Lösungsmenge der Gleichung	$\sin \frac{x}{3} = 0$	und
	der Lösungsmenge der Gleichung	$\sin \frac{x}{5} = 0$	
(b)	der Lösungsmenge der Gleichung	$2 \sin^2 x = 1$	und
	der Lösungsmenge der Gleichung	$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$?	

6. Bilden Sie für die Mengen $I = \{a, b, c\}$, $M = \{m, n\}$ folgende Kreuzprodukte $I \times M, M \times I$, **HA:** M^2!

7. Seien, A, B, C Mengen. Zeigen Sie

   a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
   b) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$
   HA: c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
   d) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, wobei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
   e) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

8. Für $t > 0$ sei $M_t = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq t\}$
   Bestimmen Sie

   a) $\bigcup\limits_{0<t\leq 1} M_t$ b) $\bigcap\limits_{0<t\leq 1} M_t$ **HA:** c) $\bigcap\limits_{1\leq t<2} M_t$ **HA:** d) $\bigcap\limits_{0<t<1} M_t$ e) $\bigcup\limits_{0<t<1} M_t$

9. Sei I beliebige Indexmenge und $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ Mengensystem mit $M_\alpha \subseteq E$ für bel. $\alpha \in I$. Zeigen Sie

$$\text{a)}\ \bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha^C = \left(\bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^C \qquad \text{b)}\ \bigcup_{\alpha\in I} M_\alpha^C = \left(\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha\right)^C,$$

wobei M_α^C die Komplementärmenge von M_α (bzgl. E) bezeichnet.

10. **HA:** Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

    a) $A \subseteq B$ b) $A \cup B = B$ c) $A \cap B = A$ d) $(B \setminus A) \cup A = B$