

11. Übung – Zahlenreihen

1. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{10}}$	HA:	(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$	HA:	(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$	(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$
(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$	HA:	(h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$	(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$
(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$	HA:	(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$	(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n-1)^2} \right)$

2. Geben Sie die Summe $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

(a) $a_n = \frac{1}{(d+n)(d+n+1)}$ ($-d \notin \mathbb{N}$),	HA:	(b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$,
HA: (c) $a_n = \frac{1}{n!}$,	HA:	(d) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$,
	HA:	(e) $a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

3. Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren oder sogar absolut konvergieren:

HA: (a) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots$,	HA: (b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \dots$,
(c) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$,	HA: (d) $1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{200} + \frac{1}{300} + \dots$,
HA: (e) $1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \frac{8}{4!} + \dots$,	HA: (f) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \pm \dots$,
(g) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^2} \pm \dots$	

4. **HA:** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6n} \right)^n$,	(b) $\left(\sum_{k=1}^{2007} \frac{k!}{5^k} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$,	(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.
---	---	---

5. Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x-1)(x-2) \cdots (x-n)}$$

konvergent?

6. Zwei Lokomotiven fahren mit je einer Geschwindigkeit v aufeinander zu. Eine Taube fliegt mit der Geschwindigkeit $w > v$ von Lok zu Lok hin und her. Der Abstand der Lokomotiven zum Startzeitpunkt t_0 sei x_0 , zu den Zeitpunkten t_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ kehre die Taube das n -te Mal um (dabei hat die Taube stets eine der Lokomotiven erreicht und benötigt zum Umkehren keine Zeit und besitzt zudem direkt die gleiche Geschwindigkeit w in entgegengesetzte Richtung), die Lokomotiven haben dann den Abstand x_n . Setze $s_n = t_{n+1} - t_n$. Bestimmen Sie:

- (a) x_n als Funktion von v, w und x_0 ,
- (b) s_n als Funktion von v, w und s_0 ,
- (c) die Gesamtflugdauer $T = \sum_{n=0}^{\infty} s_n$ als Funktion von x_0 und v .

7. **HA:** Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Die Bodenfläche des $(n + 1)$ -ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n -ten Würfels gesetzt.

- (a) Wie hoch wird der Turm?
- (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?
- (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

8. (a) Verwenden Sie den binomischen Satz um zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist! Folgern Sie daraus, dass für $a > 0$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

ist!

(c) Untersuchen Sie die Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n = \sqrt[n]{n}$ auf Monotonie!

(d) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n-1}}$?

(e) Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{n})$?

(f) Konvergiert die Reihe aus (e) absolut?

9. Wir definieren mit Hilfe der harmonischen Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}$ folgende Reihen:

- (a) **HA:** Wir summieren nur über gerade Zahlen aus \mathbb{N} .
- (b) **HA:** Wir summieren nur über durch 10 teilbare natürliche Zahlen.
- (c) Wir summieren nur über natürliche Zahlen n bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

Welche der so definierten Reihen ist konvergent?

10. Untersuchen Sie, ob die Zahlenfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind:

(a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

11. Zeigen Sie, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n < e^2$ ist.

12. **HA:** Für $n > 1$ gilt offenbar

$$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

Man leite daraus eine obere und untere Schranke für die folgende Reihe her:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$