Mathematik für Informatiker

11. Übung – Zahlenreihen

---

1. Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{10}}$ **HA:** (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3-1}$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$

   (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\arctan n)^n}{2^n}$ **HA:** (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (f) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

   (g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ **HA:** (h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(e-(1+\frac{1}{n})^n)$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

   (j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$ **HA:** (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (l) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n-1)^2}\right)$

2. Geben Sie die Summe $s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ folgender Reihen an:

   (a) $a_n = \dfrac{1}{(d+n)(d+n+1)}$ $(-d \notin \mathbb{N})$, **HA:** (b) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$,

   HA: (c) $a_n = \dfrac{1}{n!}$, **HA:** (d) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$, **HA:** (e) $a_n = \dfrac{1}{4n^2-1}$.

3. Schreiben Sie die folgenden Reihen in der Form $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ und untersuchen Sie, ob die Reihen konvergieren oder sogar absolut konvergieren:

   HA: (a) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{5}+\dfrac{5}{6}+\dots,$ **HA:** (b) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}+\dfrac{6}{27}+\dfrac{8}{81}+\dots,$

   (c) $1+\dfrac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\dots,$ **HA:** (d) $1+\dfrac{1}{100}+\dfrac{1}{200}+\dfrac{1}{300}+\dots,$

   HA: (e) $1+\dfrac{2}{2!}+\dfrac{4}{3!}+\dfrac{8}{4!}+\dots,$ **HA:** (f) $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{4}}\pm\dots,$

   (g) $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4^2}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6^2}\pm\dots.$

4. **HA:** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6n}\right)^n$, (b) $\left(\sum\limits_{k=1}^{2007} \frac{k!}{5^k}\right)+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$, (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

5. Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ ist die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x-1)(x-2)\cdot\dots\cdot(x-n)}$$

   konvergent?

6. Zwei Lokomotiven fahren mit je einer Geschwindigkeit v aufeinander zu. Eine Taube fliegt mit der Geschwindigkeit $w > v$ von Lok zu Lok hin und her. Der Abstand der Lokomotiven zum Startzeitpunkt t_0 sei x_0, zu den Zeitpunkten t_n, $n = 1, 2, 3, \dots$ kehre die Taube das n-te Mal um (dabei hat die Taube stets eine der Lokomotiven erreicht und benötigt zum Umkehren keine Zeit und besitzt zudem direkt die gleiche Geschwindigkeit w in entgegengesetzte Richtung), die Lokomotiven haben dann den Abstand x_n. Setze $s_n = t_{n+1} - t_n$. Bestimmen Sie:

(a) x_n als Funktion von v, w und x_0,

(b) s_n als Funktion von v, w und s_0,

(c) die Gesamtflugdauer $T = \sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n$ als Funktion von x_0 und v.

7. **HA:** Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetzt.

   (a) Wie hoch wird der Turm?

   (b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

   (c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

8. (a) Verwenden Sie den binomischen Satz um zu zeigen, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

   $$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

   (b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ ist! Folgern Sie daraus, dass für $a > 0$ auch

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

   ist!

   (c) Untersuchen Sie die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = \sqrt[n]{n}$ auf Monotonie!

   (d) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}-1}$?

   (e) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \sqrt[n]{n})$?

   (f) Konvergiert die Reihe aus (e) absolut?

9. Wir definieren mit Hilfe der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$ folgende Reihen:

   (a) **HA:** Wir summieren nur über gerade Zahlen aus $\mathbb{N}$.

   (b) **HA:** Wir summieren nur über durch 10 teilbare natürliche Zahlen.

   (c) Wir summieren nur über natürliche Zahlen n bei denen in der Dezimaldarstellung die Ziffer 9 nicht vorkommt.

   Welche der so definierten Reihen ist konvergent?

10. Untersuchen Sie, ob die Zahlenfolgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen sind:

    (a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

11. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n < e^2$ ist.

12. **HA:** Für $n > 1$ gilt offenbar

    $$\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}\,.$$

    Man leite daraus eine obere und untere Schranke für die folgende Reihe her:

    $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$