

10. Übung – Konvergenz von Zahlenfolgen

1. **HA:** Ermitteln Sie die Grenzwerte und diskutieren Sie die unterschiedlichen Annäherungen nachstehender Folgen an diese (Skizze!):

(a) $x_n = \frac{1}{n}$, (b) $x_n = -\frac{1}{n}$, (c) $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, (d) $x_n = \frac{2+(-1)^n}{n}$,
 (e) $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$.

2. **HA:** Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Man gebe Beispiele mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ an, für die obige Aussage falsch ist, insbesondere soll gelten:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = c$ ($c \in \mathbb{R}$), (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$, (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty$.

3. Geben Sie a und $N(\varepsilon)$ an, so dass $\forall \varepsilon > 0$ gilt $|x_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N(\varepsilon)$:

(a) $x_n = \frac{n}{n^3+n^2+1}$, **HA:** (b) $x_n = \frac{\sin^3 n + \cos^2 n}{\sqrt{n}}$, **HA:** (c) $x_n = \frac{n-1}{n^2-1} - 1$,
 (d) $x_n = (1 + \frac{1}{n})^4$.

4. Bestimmen Sie die Grenzwerte von

(a) $x_n = \frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}$, **HA:** (b) $x_n = n^2 \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} \right)$,
 (c) $x_n = \frac{\sum_{i=0}^k a_i n^i}{\sum_{j=0}^j b_j n^j}$ ($k, j \in \mathbb{N}$), **HA:** (d) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$,
 (e) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$, **HA:** (f) $x_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$,
 (g) $x_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$, **HA:** (h) $x_n = \frac{1+2+\dots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$,
 (i) $x_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$, **HA:** (j) $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$ ($a, b > 0$),
 (k) $x_n = \frac{n^3+(-1)^n n^2}{2n^3+1}$, **HA:** (l) $x_n = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n}$,
 (m) $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad n \geq 2, \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 1$.

5. Es sei (x_n) eine Nullfolge und (c_n) eine beschränkte Zahlenfolge.

Dann gilt $\tilde{x}_n := c_n x_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

6. **HA:** Geben Sie eine „ ε -Definition“ dafür an, dass eine Folge (x_n) **nicht** gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert.

7. Seien $x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $s_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ und $e := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Beweisen Sie:

(a) $e - s_n < \frac{1}{n!n}$. (b) Die Zahl e ist irrational.

8. **HA:** Es seien $a_1 = 2$ und $a_{n+1} = \frac{7a_n+2}{6a_n+3}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass $a_n > 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton fallend ist, d.h. $a_n - a_{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- (c) Zeigen Sie, dass (a_n) eine konvergente Folge ist! Bestimmen Sie den Grenzwert.

9. **HA:** Sie sollen mit Hilfe eines Computers den Wert \sqrt{x} ($x > 0$) berechnen. Ein Mathematiker behauptet, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{x}$ mit $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{x}{a_n})$, $a_1 > 0$, $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist diese Behauptung richtig? (Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass (a_n) konvergiert!)
10. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck mit Seitenlänge a unterliegt die sogenannte Kochsche Schneeflocke der folgenden Bildungsvorschrift. Die Berandung T_n nach dem n -ten Entwicklungsschritt entsteht aus T_{n-1} indem auf dem mittleren Drittel einer jeden geradlinigen Berandungsstrecke von T_{n-1} ein gleichseitiges Dreieck aufgesetzt wird ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Man berechne den Umfang U_n und Flächeninhalt F_n der Figur T_n sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n$. (Hinweis: Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Kantenlänge a beträgt $F_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.)

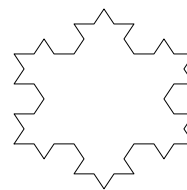
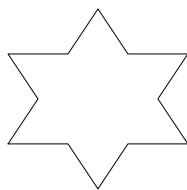
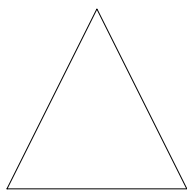


Abbildung 1: Schneeflocke T_0 . Abbildung 2: Schneeflocke T_1 . Abbildung 3: Schneeflocke T_2 .

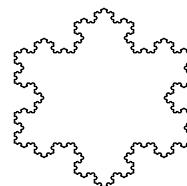
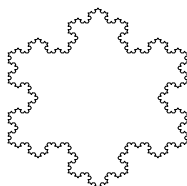
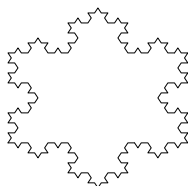


Abbildung 4: Schneeflocke T_3 . Abbildung 5: Schneeflocke T_4 . Abbildung 6: Schneeflocke T_5 .

11. Ermitteln Sie die Grenzwerte folgender Zahlenfolgen

(a) $x_n = \frac{c^n}{n!}$ ($c > 0$), (Z) $x_n = \underbrace{\sqrt{c + \sqrt{c + \dots + \sqrt{c}}}}_{n \text{ Wurzeln}}$ ($c > 0$),

(b) $x_{n+1} = x_n(2 - x_n)$ ($0 < x_0 < 1$).

(c) **HA:** Lösen Sie (b) für x_0 beliebig graphisch mit Hilfe des Computers!

12. **HA:** Ein rechtwinkliges Dreieck ABC habe die Katheten a und b und die Hypotenuse c . Von C wird das Lot auf die Hypotenuse gefällt. Vom Fußpunkt des Lotes wird das Lot auf die Kathete b , von dessen Fußpunkt das Lot auf c , dann wieder auf b usw. gefällt. Das Verfahren denke man sich unbegrenzt fortgesetzt. Zeigen Sie, dass die Summe der Längen h_i ($i = 1, 2, \dots$) aller Lote gleich $\frac{ab}{c-b}$ ist. (Hinweis: Drücken Sie h_i mit Hilfe eines der Winkel im Dreieck aus!)

Zusatz: Zeigen Sie, dass folgende Folgen $f_{n+1} = \sqrt{f_n F_n}$, $F_{n+1} = \frac{2f_{n+1}F_n}{f_{n+1}+F_n}$ ($n \in \mathbb{N}$) mit den Anfangsbedingungen $f_1 = 2$, $F_1 = 4$ eine Intervallschachtelung $[f_n, F_n]$ definieren, und dass dabei gilt $F_n - f_n \leq \frac{2}{(2+\sqrt{2})^{n-1}}$. Berechnen Sie f_{12} und F_{12} .