Mathematik für Informatiker

1. Semesterpausenhausaufgabe

---

1. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

   (a) Berechnen Sie $2B - A$.

   (b) Lösen Sie die Gleichung $A + X = B$, $X \in \mathbb{R}^{2\times 3}$.

   (c) Wie groß ist der Rang von A, B und X ?

   (d) Kann man durch Änderung eines Elementes den Rang von B verkleinern?

   (e) Berechnen Sie den Rang von BA^T und AB^T.

   (f) Sind die Gleichungssysteme $B^T x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B^T y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ lösbar?

   (g) Geben Sie eine Basis des Bildraumes von A an!

   (h) Bilden die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eine Basis des Bildraumes von B^T?

2. Gegeben seien die folgenden Systeme in $\mathbb{R}$:

   $$\begin{array}{rcrcrcr} u_1 = & x_1 & - & x_2 & + & x_3 \\ u_2 = & & - & x_2 & & \\ u_3 = & & & & - & x_3 \end{array} ; \quad \begin{array}{rcrcrcr} x_1 = & y_1 & - & y_2 & + & y_3 \\ x_2 = & & & y_2 & - & y_3 \\ x_3 = & y_1 & & & + & y_3 \end{array} ; \quad \begin{array}{rcrcrcr} y_1 = & z_1 & - & z_2 & & \\ y_2 = & z_1 & + & z_2 & & \\ y_3 = & & & z_2 & + & z_3 \end{array}$$

   Bestimmen Sie die Matrizen A, B, C, D und E, so dass gilt:

   $$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

   $$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

   Welche Beziehung besteht zwischen A und E ?

3. Geben Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ an für die der Rang der Matrix

   $$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 3 \\ 3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

   maximal ist!

4. Gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix

   $$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \varphi & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

den Rang 2 hat?

Für welche φ liegt der Vektor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in der linearen Hülle der Spalten von A_φ?

5. Gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass die Matrix $A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$ den Rang 1 hat? Wenn ja, geben Sie alle diese $\varphi \in [0, \pi]$ an.

6. Welchen Rang hat die $n \times n$ Matrix

   $$A = [a_{j,k}]_{j,k=1}^{n}$$

   mit den komplexen Einträgen

   $$a_{j,k} = \begin{cases} 1 + ji & : \quad k = n - j \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

   Bestimmen Sie A^T, A^H. Ist A symmetrisch? Ist A hermitesch?

7. Sei $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times l}$. Zeigen Sie:

   (a) $(A^T)^T = A$

   (b) $(A\,B)^T = B^T A^T$

8. Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

9. Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ bzgl. der Multiplikation keine **abelsche** Gruppe bilden.

10. Sei $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. Bestimmen Sie alle α für die

    (a) rang $A_\alpha = 3$,

    (b) rang $A_\alpha = 2$,

    (c) rang $A_\alpha = 1$ ist.

    (d) Wieviel linear unabhängige Zeilen hat A_0?

    (e) Wieviel linear unabhängige Spalten hat A_0?

11. Es seien folgende Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$

    $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

    gegeben. Leiten Sie aus der Matrixgleichung

    $$AX + XB = C$$

    ein lineares Gleichungssystem für die Einträge $x_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ der 2×2 Matrix $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ her.