

Mathematik für Informatiker

1. Semesterpausenhausaufgabe

1. Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

- (a) Berechnen Sie $2B - A$.
- (b) Lösen Sie die Gleichung $A + X = B$, $X \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.
- (c) Wie groß ist der Rang von A, B und X ?
- (d) Kann man durch Änderung eines Elementes den Rang von B verkleinern?
- (e) Berechnen Sie den Rang von BA^T und AB^T .

(f) Sind die Gleichungssysteme $B^T x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B^T y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ lösbar?

(g) Geben Sie eine Basis des Bildraumes von A an!

(h) Bilden die Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eine Basis des Bildraumes von B^T ?

2. Gegeben seien die folgenden Systeme in \mathbb{R} :

$$\begin{array}{llll} u_1 = x_1 - x_2 + x_3 & x_1 = y_1 - y_2 + y_3 & y_1 = z_1 - z_2 \\ u_2 = & - x_2 & ; & x_2 = y_2 - y_3 ; & y_2 = z_1 + z_2 \\ u_3 = & & - x_3 & x_3 = y_1 + y_3 & y_3 = z_2 + z_3 \end{array}$$

Bestimmen Sie die Matrizen A, B, C, D und E , so dass gilt:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Welche Beziehung besteht zwischen A und E ?

3. Geben Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ an für die der Rang der Matrix

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 3 \\ 3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

maximal ist!

4. Gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ so, dass die Matrix

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \varphi & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

den Rang 2 hat?

Für welche φ liegt der Vektor $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in der linearen Hülle der Spalten von A_φ ?

5. Gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$, so dass die Matrix $A_\varphi = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$ den Rang 1 hat? Wenn ja, geben Sie alle diese $\varphi \in [0, \pi]$ an.

6. Welchen Rang hat die $n \times n$ Matrix

$$A = [a_{j,k}]_{j,k=1}^n$$

mit den komplexen Einträgen

$$a_{j,k} = \begin{cases} 1 + ji & : k = n - j \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie A^T, A^H . Ist A symmetrisch? Ist A hermitesch?

7. Sei $A \in K^{m \times n}, B \in K^{n \times l}$. Zeigen Sie:

(a) $(A^T)^T = A$

(b) $(AB)^T = B^T A^T$

8. Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

9. Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ bzgl. der Multiplikation keine **abelsche** Gruppe bilden.

10. Sei $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$). Bestimmen Sie alle α für die

(a) $\text{rang } A_\alpha = 3$,

(b) $\text{rang } A_\alpha = 2$,

(c) $\text{rang } A_\alpha = 1$ ist.

(d) Wieviel linear unabhängige Zeilen hat A_0 ?

(e) Wieviel linear unabhängige Spalten hat A_0 ?

11. Es seien folgende Matrizen aus $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

gegeben. Leiten Sie aus der Matrixgleichung

$$AX + XB = C$$

ein lineares Gleichungssystem für die Einträge $x_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3, 4$) der 2×2 Matrix

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \text{ her.}$$