Mathematik für Informatiker

19. Übung – Funktionen mehrerer Veränderlicher

---

1. **HA:** Entwickeln Sie die Funktion $u(x,y) = x^y$ im Punkt $(1,0)$ nach der Taylorformel bis zu Anteilen 2. Ordnung.

2. **HA:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$,

$$f_1(x,y) = x^2 e^y + 2\sin x\,,\ f_2(x) = y^2 \cos x + xy^3\,.$$

   (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung, und untersuchen Sie diese auf Stetigkeit in $\mathbb{R}^2$.

   (b) Geben Sie die erste Ableitung von f in einem Punkt (x_0, y_0) an!

   (c) Bestimmen Sie folgende partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial x \partial y}\,,\ \frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y \partial x}\,,\ \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial x^2}\,.$$

3. **HA:** Bestimmen Sie den Gradienten von $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$,

$$z(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)\,.$$

   Geben Sie alle stationären Punkte an, und zeigen Sie, dass einer dieser ein Sattelpunkt ist!

4. Untersuchen Sie folgende Funktion $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Extremwerte

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\,.$$

5. Bestimmen Sie die Extremstellen von z unter den angegebenen Nebenbedingungen

   (a) $z = 6 - 4x - 3y,$ wobei $x^2 + y^2 = 1,$

   (b) $z = \cos^2 x + \cos^2 y,$ wobei $y - x = \frac{\pi}{4}.$

6. (a) Zerlegen Sie die positive Zahl a in drei nichtnegative Summanden so, dass deren Produkt möglichst groß wird.

   (b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass das arithmetische Mittel dreier nichtnegativer Zahlen $x, y, z \geq 0$ nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d. h.

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}\,.$$

Zusatz: Unter allen einer Kugel einbeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!