

## 19. Übung – Funktionen mehrerer Veränderlicher

---

1. **HA:** Entwickeln Sie die Funktion  $u(x, y) = x^y$  im Punkt  $(1, 0)$  nach der Taylorformel bis zu Anteilen 2. Ordnung.

2. **HA:** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch  $f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix}$ ,

$$f_1(x, y) = x^2 e^y + 2 \sin x, \quad f_2(x, y) = y^2 \cos x + xy^3.$$

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung, und untersuchen Sie diese auf Stetigkeit in  $\mathbb{R}^2$ .

(b) Geben Sie die erste Ableitung von  $f$  in einem Punkt  $(x_0, y_0)$  an!

(c) Bestimmen Sie folgende partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 f_1(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f_1(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f_2(x, y)}{\partial x^2}.$$

3. **HA:** Bestimmen Sie den Gradienten von  $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ,

$$z(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2).$$

Geben Sie alle stationären Punkte an, und zeigen Sie, dass einer dieser ein Sattelpunkt ist!

4. Untersuchen Sie folgende Funktion  $z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf Extremwerte

$$z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

5. Bestimmen Sie die Extremstellen von  $z$  unter den angegebenen Nebenbedingungen

(a)  $z = 6 - 4x - 3y$ , wobei  $x^2 + y^2 = 1$ ,

(b)  $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ , wobei  $y - x = \frac{\pi}{4}$ .

6. (a) Zerlegen Sie die positive Zahl  $a$  in drei nichtnegative Summanden so, dass deren Produkt möglichst groß wird.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von (a), dass das arithmetische Mittel dreier nichtnegativer Zahlen  $x, y, z \geq 0$  nicht kleiner ist als ihr geometrisches Mittel, d. h.

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

**Zusatz:** Unter allen einer Kugel eingeschriebenen Zylindern ist der Zylinder maximalen Volumens zu finden!