Mathematik für Informatiker

18. Übung – Funktionenreihen

---

1. Bestimmen Sie für die (reellwertige) Funktion $f(x)$ das Taylorpolynom dritten Grades zum Entwicklungspunkt x_0, und geben Sie das Restglied nach Lagrange an:

   (a) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 0$ (b) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$
   (c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0$ **HA:** (d) $f(x) = \tan x$, $x_0 = 0$

2. **HA:** Geben Sie die Darstellung des Polynoms $p(x) = x^3 + 3x - 5 \in \mathbb{R}_3[x]$ bezüglich der Basis $\{(x-1)^k\}_{k=0}^3$ an!

3. **HA:** Welchen Grad muß das Taylorpolynom von $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_o = 0$ mindestens haben, um $f(\frac{\pi}{15}) = \sin 12^o$ mit einem Fehler, der kleiner als 10^{-3} ist, zu berechnen ?

4. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe nach Potenzen von x (unter Verwendung bekannter Taylorreihen)

   (a) $f(x) = e^{-x^2}$, **HA:** (b) $f(x) = \sinh x$,
   (c) $f(x) = a^x$, (d) $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

   Geben Sie den Konvergenzbereich an !

5. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Potenzreihe zum Entwicklungspunkt x_0, und geben Sie den Konvergenzbereich an

   (a) $f(x) = e^x$ $(x_0 = \pi)$, (b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $(x_0 = 2)$,
   HA: (c) $f(x) = \sin x$ $(x_0 = \pi)$.

6. Entwickeln Sie folgende Funktionen in eine Fourierreihe im angegebenen Intervall nach dem Funktionensystem $\{1, \cos nx, \sin nx\}_{n=1}^{\infty}$ (Diskussion der Sprungstellen, Intervallenden und Skizze).

   (a) $f(x) = \sin ax$ in $(-\pi, \pi)$ $(a = \text{const})$,
   (b) $f(x) = |\cos x|$ in $(-\infty, \infty)$,
   HA: (c) $f(x) = |x|$ in $(-\pi, \pi)$,
   HA: (d) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ in $(-\pi, \pi)$.

7. (a) Zerlegen Sie $f(x) = \frac{\pi}{4}$ in $(0, \pi)$ in eine Sinusreihe!

   (b) **HA:** Zerlegen Sie $f(x) = x^2$ in $(0, \pi)$ in eine Cosinusreihe !

   Zusatz:

   Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Resultate die Summe der Reihen
   $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$!

Zusatz 1: Stellen Sie durch eine unendliche Reihe dar:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan x}{x}\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Zusatz 2: Berechnen Sie die Summe folgender Potenzreihen (unter Verwendung bekannter Reihen)

(a) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$ (b) $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$

(Konvergenzbereich angeben!)

Zusatz 3: Gegeben sei eine auf $\mathbb{R}$ stetige w-periodische Funktion f. Zeigen Sie, dass dann jedes Integral über ein beliebiges Intervall der Länge w den Wert

$$W := \int_0^w f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{hat.}$$

Zusatz 4: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar und $2T$ periodisch ($T \neq \pi$). Wie sieht die zugehörige Fourier-Reihe aus ?