Mathematik für Informatiker

17. Übung – Gewöhnliche Differentialgleichungen

---

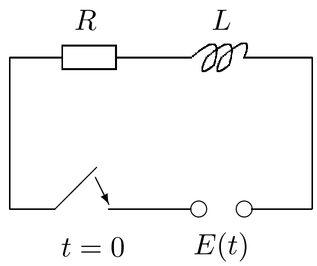
1. In welcher Zeit kühlt sich ein Körper, der auf 100^oC erhitzt wurde, in einem Raum mit der Temperatur von 20^oC bis auf 25^oC ab, wenn er sich in 10 min bis auf 60^oC abkühlt? (Hinweis: Die Geschwindigkeit der Abkühlung ist proportional der Temperaturdifferenzen.)

2. Bestimme die Bewegungsgleichung eines Massepunktes, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 von der Erdoberfläche senkrecht nach oben geschossen wird! Nach welcher Zeit erreicht er seine höchste Lage? Wie hoch befindet er sich in diesem Moment?

3. **HA:** Bestimme das Zerfallsgesetz von Radium, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ die Masse m_0 vorhanden ist. (Die Halbwertzeit von Radium beträgt 1600 Jahre.)

4. Die Stromstärke I in einem Stromkreis mit dem Ohmschen Widerstand R, der Selbstinduktion L und der elektromotorischen Kraft E genügt der Dgl. $L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$ (R und L konstant). Berechne $I(t)$, wenn zur Zeit $t = 0$ der Stromkreis geschlossen wird!
   HA: (a) $E(t) = E_0$ **HA:** (b) $E(t) = kt$

   (Z) $E(t)$ beliebig.



5. Lösen Sie folgende lineare Differentialgleichungen:

   HA: (a) $y' = 2xy - x^3 + x$

   (b) $xy' - 2y = 2x^4$

   HA: (c) $y' = (\sin x)(1 - y)$

   (d) $y' + y \sin x = \sin x \cos x$

   HA: (e) $y' + y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} = \varphi(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$ ($\varphi(x)$ sei geg. diffbare Fkt.)

   (Z) $(x - 2yx - y^2)\mathrm{d}y = -y^2\mathrm{d}x$

6. Gegeben seien zwei spezielle Lösungen y_1 und y_2 einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Bestimme aus ihnen die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ($y_1 \neq y_2$).

7. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$y' = \frac{-x}{1+x^2}y + \frac{1}{x(1+x^2)} \quad (x > 0)\,,$$

wenn zwei spezielle Lösungen gegeben sind:

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(-1 + \ln\left(\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right)$$

   (a) mit Hilfe des Resultates von Aufgabe 6,

   HA: (b) mit Hilfe der Variation der Konstanten!

8. **HA:** Finde die Lösung der Gleichung

$$y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$$

die für $x \to \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleibt.

9. Geben Sie die allgemeine Lösung $u_h(t)$ folgender homogoner Differentialgleichungen an:

   (a) $\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 3u(t) = 0$
   HA: (b) $\ddot{u}(t) - \dot{u}(t) - 2u(t) = 0$
   (c) $\ddot{u}(t) + 4u(t) = 0$
   HA: (d) $\dddot{u}(t) - 2\ddot{u}(t) - \dot{u}(t) + 2u(t) = 0$
   (e) $\dddot{u}(t) + 2\ddot{u}(t) + \dot{u}(t) = 0$

   HA: Überprüfen Sie alle Ergebnisse!

10. Geben Sie eine partikuläre Lösung $u_p(t)$ für die Differentialgleichungen aus Aufgabe 9 an, wenn auf der rechten Seite "0" durch folgende Funktionen ersetzt wird:

    (a) $\sin t$ **HA:** (b) $\cos t$ **HA:** (c) $3\cos t$ **HA:** (d) $t^2 + \frac{1}{2}$ (e) $t^2 + 2$

11. Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

    $\ddot{u}(t) + 4\dot{u}(t) + 4u(t) = 25 \sin t,$

    die den Anfangsbedingungen

    $u(0) = 0, \qquad \dot{u}(0) = 1$

    genügt!

    HA: Überprüfen Sie Ihr Ergebnis!

12. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichungen:

    (a) $y''(x) - 2y'(x) - 3y(x) = e^{4x}$ **HA:** (b) $y''(x) - y(x) = xe^{2x}$
    (c) $y''(x) + 4y(x) = \frac{1}{\sin 2x}$.

13. **HA:** Geben Sie für Aufgabe 12 (a),(b) diejenigen Lösungen an, die den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$ genügen.

Zusatz 1: Am Boden eines zylindrischen Gefäßes, welches bis zur Höhe H_0 mit Wasser gefüllt ist, befindet sich eine kleine Öffnung der Fläche q, die vom Zeitpunkt $t = 0$ an proportional zur Zeit geöffnet wird. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Zylinder zum Zeitpunkt $t = T$, wenn hier die Öffnung erstmalig vollständig offen ist? (Hinweis: Die Ausflussgeschwindigkeit von H_2O aus einer kleinen Öffnung, die sich in der Tiefe h unterhalb der freien Wasseroberfläche befindet, ist gerade $\sqrt{2gh}$ mit g-Erdbeschleunigung.)

Zusatz 2: Ein Käfer befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ am unteren Ende eines Baumes der Länge ℓ. Dieser Baum wächst gleichmäßig mit Geschwindigkeit v_1. Der Käfer beginnt nun mit konstanter Geschwindigkeit v_2 den Baum nach oben zu krabbeln. Erreicht der Käfer jemals die Spitze des Baumes?

Zusatz 3: Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) - 6y'(x) + 8y(x) = e^{2x}\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = \frac{5}{2}\ !$$